This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Mathematics
QA
371
.U82
B 492390

GENERAL LIBRARY
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ARTES · SCIENTIA · VERITAS
1817

Mathematics
QA
371
.U82

MÉMOIRE

SUR

LES MÉTHODES D'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET AUX

DIFFÉRENCES.

Prince S. S. Ouroussow. [Urusov]

MOSKOU.
Imprimerie W. Gautier, au Pont des Maréchaux, maison Torletzky.
1868.

Mathematics
QA
371
.U82

Math
gift
Prof. H. E. Bannan
7-10-58

Math. Lib.
QA
371
.U82

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction..... Page V.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Chapitre I. Équations aux dérivées partielles..... Page 1
— II. Méthode du facteur intégrant..... 29
— III. Méthode des intégrales particulières, appliquée à l'équation $Ndy+Mdx=0$..... 34
— IV. Application, des méthodes précédentes aux équations linéaires.. 64
— V. Méthode Symbolique..... 80
— VI. Méthodes pour trouver plusieurs intégrales du même ordre..... 107
— VII. Solutions particulières. — Résumé..... 124

SECONDE PARTIE.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES.

Chapitre. I. Intégration immédiate..... 165
— II. Intégration par le moyen d'un facteur..... 170
— III. Nouvelle propriété des équations linéaires. Méthode symbolique. 179
— IV. Solutions particulières..... 286
Note I. Sur l'intégrale générale des équations linéaires..... 197
Note II. Sur les fonctions elliptiques..... 208

1-2-371.U82

INTRODUCTION.

Le but de cet ouvrage est de définir exactement l'état présent de la théorie de l'intégration des équations différentielles et aux différences finies. Il m'est arrivé souvent d'entendre que tel problème, *dans l'état présent de l'analyse*, doit être regardé comme insoluble; mais nullepart je n'ai trouvé des arguments plausibles à l'appui de pareilles assertions. Je crois pouvoir énoncer aujourd'hui la définition requise.

La solution générale d'un problème sera connue si l'on en trouve une solution particulière, mais il n'existe aucune méthode pour trouver cette dernière. Quant à l'intégration des équations, le développement de cette théorie se trouve arrêté principalement par la solution particulière dont dépend l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre et que l'on ne sait pas trouver. Cette équation constitue la limite que l'on ne sait pas franchir: et il est à présumer que, dès qu'on l'aura franchie, il n'y aura plus d'équations insolubles.

Pour justifier cet énoncé j'ai dû rassembler des matériaux, les compiler et résoudre plusieurs problèmes importants. Afin d'éviter tout malentendu et ne pas m'approprier ce qui appartient à d'autres, je vais exposer en peu de mots les matières qui ont servi de fondement à chacun des Chapitres.

Le premier chapitre de la première partie traite des équations aux dérivées partielles. Ici je n'ai fait que réduire une partie et étendre une autre partie d'un Mémoire publié en langue russe en 1865 dans les travaux da la société philomatique de Moscou par M. Davidoff professeur à l'université de Moscou. Dans les deux chapitres suivants je recommande, comme plus digne d'attention, la méthode peu connue de M. Minding (de Dorpat), à l'aide de laquelle je prouve que si l'équation du premier ordre $Mdx+Ndy=0$ admet une solution particulière de la forme $y=$ *fonction finie et explicite de* x, on trouvera non seulement cette solution, mais aussi l'intégrale générale de cette équation.

La plus importante de mes propositions est énoncée sous différentes formes et démontrée dans les chapitres IV, V, ainsi que dans la Note I. Elle consiste en ceci, que l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n dépendra des seules opérations algébriques, telles que l'élimination et la résolution des équations, si l'on donne la valeur soit d'une seule intégrale particulière d'une certaine équation non-linéaire d'ordre $2(n-1)$, soit du facteur intégrant d'une certaine équation de second ordre, soit, enfin, de *la racine symbolique* α_i de l'équation *symbolique*,

$$(D+\alpha_n)(D+\alpha_{n-1})\ldots(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y=0,$$

$$D=\frac{d}{dx},$$

à laquelle se ramène l'équation linéaire

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+X_2\frac{dy}{dx}+X_1y=0.$$

Les $n-1$ fonctions de x, désignées par α_n, α_{n-1},...

α_3, α_1, sont toutes exprimables, et sans aucun signe d'intégration, en α_2 et les dérivées de cette quantité; par conséquent, en posant pour abréger

$$(D+\alpha_3)^{-1}.\ldots.(D+\alpha_n)^{-1}0=P,$$

on réduit la proposée à l'équation linéaire du second ordre $(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y = P$. Si donc l'on donne la valeur de α_2, celle de α_1 sera connue, et l'on aura

$$y=e^{-\int\alpha_1 dx}\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}\int e^{\int\alpha_2 dx} P dx^2,$$

les constantes arbitraires étant sous-entendues. De cette manière la proposition énoncée par M. Serge Iourieff (Géomètre de Moscou) dans le Tome I du „Recueil Mathématique", publié en langue russe, se trouve établie et devient incontestable.

Je passe ensuite (Chapitre VI) aux méthodes presqu'inconnues pour trouver plusieurs intégrales du même ordre afin d'en déduire par l'élimination des coefficients différentiels l'intégrale générale. Ici c'est la méthode de M. Bougaïeff (professeur à l'université de Moscou) qui mérite particulièrement l'attention des géomètres, car elle augmente les cas d'intégrabilité d'une manière prodigieuse et que d'ailleurs elle permet de découvrir les solutions particulières sans tâtonnement.

Le dernier chapitre de la première partie est consacré aux méthodes pour découvrir les solutions particulières. L'une de ces méthodes se trouve exposée pour la première fois dans mon ouvrage publié en langue russe en 1863; l'autre est basée sur la substitution de la forme

$$u = \int_{t_0}^{t_1} e^{f(x.)t.} T.dt.$$

On trouve dans l'ouvrage de M. Petzeval la substitution

$$u = \int_{t_0}^{t_1} e^{tx} . \mathrm{T} . dt$$

que l'auteur applique aux équations réductibles à la forme

$$x . \Phi\left(\frac{d}{dx}\right)u + \psi\left(\frac{d}{dx}\right)u = 0$$

(à consulter aussi l'excellent ouvrage de M. George Boole „Differential Equations"); mais l'équation générale, autant que je sache, n'a jamais été traitée par cette méthode.

La Seconde partie de ce Mémoire est un résumé de ce que j'avais fait à différentes époques pour le développement de l'intégration des équations aux différences finies. Je puis me vanter d'être le premier à relever du néant cette théorie pour la placer presqu'au niveau de la théorie des équations différentielles.

Enfin, la dernière des deux Notes qui complètent cet ouvrage a pour objet de réduire la théorie des fonctions elliptiques au *problème des moyennes*, traité par Gauss, et à l'intégration des équations différentielles linéaires. Ce n'est qu'un petit fragment de mon Recueil de problèmes auquel je travaille depuis plusieurs années.

En terminant, je crois devoir remercier les géomètres de Moscou, et M. Iourieff surtout, pour la bonne volonté avec laquelle ils ont mis à ma disposition leurs écrits et plusieurs mémoires importants des savants étrangers.

CHAPITRE I.

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

§ 1. *Équations de la forme* $F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)=0.$

1. La théorie de ces équations présente deux problèmes distincts: le premier consiste à réduire la proposée à un système d'équations différentielles ordinaires; le second à trouver l'intégrale générale de ce système. Je ne m'occuperai ici que du premier de ces problèmes.

Considérons d'abord l'équation du premier ordre

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)=0,$$

à deux variables indépendantes x et y, et convenons d'écrire

$$Z_r^{(s)} \text{ au lieu de } \frac{dz^{r+s}}{dx^r dy^s},$$

$$X \text{ — — — } \frac{dF}{dx},$$

$$Y \text{ — — — } \frac{dF}{dy},$$

$$Z_r^{(s)} \text{ — — — } \frac{dF}{dz_r^{(s)}},$$

en sorte que

$$F(x, y, z, z_1, z')=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D_1)$$

soit l'équation donnée, dF, la différentielle totale,

$$Xdx+Ydy+Zdz+Z_1dz_1+Z'dz'=0. \quad \ldots \quad (D'_1),$$

et

$$dz_r^{(s)}=\frac{dz_r^{(s)}}{dx}dx+\frac{dz_r^{(s)}}{dy}dy$$

$$dz_r^{(s)}=z_{r+1}^{(s)}dx+z_r^{(s+1)}dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C_n).$$

Actuellement cette dernière représente la seule équation

$$dz = z_1 dx + z' dy \ldots\ldots\ldots\ldots (C_1).$$

2. Cela posé, je commencerai par établir les deux principes suivants:

Premier Principe. Étant donnée une équation à n inconnues de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0,$$

les coefficients étant indépendants des variables $x_1 \ldots x_n$, on peut éliminer ces variables au moyen de $n - 1$ équations de la forme

$$\begin{aligned}
&a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots\ldots + a'_n x_n = 0\\
&a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + \ldots\ldots + a^{(\prime\prime)}_n x_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1^{(n-1)} x_1 + a_2^{(n-1)} x_2 + \ldots + a_n^{(n-1)} x_n = 0,
\end{aligned}$$

les coefficients a'_1, $a''_1 \ldots a_1^{(n-1)}, \ldots a_n^{(n-1)}$ étant des quantités indéterminées. Cette opération fournira

$$\textit{Déterminant} = 0,$$

ou simplement

$$D = 0,$$

et par suite

$$a_1 \frac{dD}{da_1} + a_2 \frac{dD}{da_2} + \ldots + a_n \frac{dD}{da_n} = 0,$$

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \frac{dD}{da_1} : \frac{dD}{da_2} \ldots : \frac{dD}{da_n}.$$

Second principe. Soient m équations de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0,$$

à n inconnues, n étant $> m$, et représentons par

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_i x_i = 0$$

le résultat que l'on obtiendrait en éliminant du dit système $m - 1$ des n inconnues à partir de x_n. On sait qu'en éliminant tour à tour chacun des autres groupes on formerait autant de ces résultats qu'il existe de combinaisons de n lettres $m - 1$ à $m - 1$. Si tous les coefficients sont nuls dans l'une de ces équations, soit

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0, \ldots A_i = 0,$$

ils seront nuls encore dans chacune des autres. Et, réciproquement, si l'on a toujours

$$A_1 x_r + A_2 x_s + \ldots + A_i x_q = 0,$$

indépendamment du groupe éliminé, on aura aussi

$$A_1=0,\ A_2=0,\ldots A_i=0.$$

Pour fixer ler idées, soient $n=4$, $m=2$, et

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$
$$a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4=0.$$

Éliminant x_4, on trouve

$$(a_1a'_4-a'_1a_4)x_1+(a_2a'_4-a'_2a_4)x_2+(a_3a'_4-a'_3a_4)x_3=0$$

Je dis donc que si l'on a en même temps

$$a_1a'_4-a'_1a_4=0,\quad a_2a'_4-a'_2a_4=0,\quad a_3a'_4-a'_3a_4=0,$$

on aura aussi

$$a_1a'_3-a'_1a_3=,\quad a_2a'_3-a_2a'_3=0,$$
$$a_1a'_2-a'_1a_2=0.$$

Cela est évident sans démonstration.

De plus je dis que si la relation qui existe entre les coefficients est telle que l'on ait identiquement, après réduction,

$$(a_1a'_4-a'_1a_4)x_1+(a_2a'_4-a'_2a_4)x_2+(a_3a'_4-a'_3a_4)x_4=0$$
$$(a_1a'_4-a'_1a_4)x_1+(a_2a'_4-a'_2a_4)x_3+(a_3a'_4-a'_3a_4)x_4=0,$$

etc, c'est-à-dire que les valeurs des coefficients restent invariablement les mêmes indépendamment des quantités éliminées, on devra avoir

$$a_1a'_4-a'_1a_4=0,\quad a_2a'_4-a'_2a_4=0,\quad a_3a'_4-a'_3a_4=0.$$

Il suffit même que deux de ces déterminants soient nuls, car le dernier le sera aussi, attendu que, par hypothèse, les inconnues $x_1\ldots x_4$ sont différentes de zéro.

En effet, supposer que les équations de la forme

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=0$$
$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_4=0$$
$$A_1x_1+A_2x_3+A_3x_4=0.$$

existent, c'est admettre que les inconnues sont liées entre elles par les relations

$$\frac{x_1}{x_1}=\frac{x_2}{x_2}=\frac{x_4}{x_3},$$
$$\frac{x_1}{x_1}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_4}{x_4},\ \text{etc,}$$

lesquelles, par hypothèse, n'existent pas.

Ces deux principes, ou même l'un d'eux, admis, les démonstrations que je vais proposer seront admises aussi.

3. Reprenons d'abord l'équation

$$Xdx+Ydy+Zdz+Z_1dz+Z'dz'=0,\ldots\ldots(D'_1)$$

et au moyen du système

$$\begin{aligned}
&a_1dx+a_2dy+a_3dz+a_4dz_1+a_5dz'=0\\
&a'_1dx+a'_2dy+a'_3dz+a'_4dz_1+a'_5dz'=0\\
&a''_1dx+a''_2dy+a''_3dz+a''_4dz_1+a''_5dz'=0\\
&a'''_1dx+a'''_2dy+a'''_3dz+a'''_4dz_1+a'''_5dz'=0,
\end{aligned}$$

effectuons l'élimination des différentielles; nous trouverons invariablement

$$Xq_1+Yq_2+Zq_3+Z_1q_4+Z'q_5=0,\ldots\ldots(d'_1)$$

c'est-à-dire

$$\textit{déterminant}=0,$$

$q_1\ldots q_5$ étant les déterminants mineurs $\frac{dD}{dX}$, $\frac{dD}{dY}$, $\frac{dD}{dZ}$, etc.

Les quantités $a^s{}_r$ étant arbitraires, les $q_1\ldots q_5$ le sont aussi, en ce sens que ces déterminants ne sont liés entre eux que par la seule condition (d'_1).

Suivant le *premier principe* du numéro précédent on a

$$\frac{dx}{q_1}=\frac{dy}{q_2}=\frac{dz}{q_3}=\frac{dz_1}{q_4}=\frac{dz'}{q_5};\ldots\ldots\ldots(S_1)$$

ce qui prouve que la proposée $F=0$ est *réductible aux équations différentielles simultanées*.

4. Après cela pour éviter tout tâtonnement dans la recherche des valeurs que peuvent prendre les inconnues $q_1\ldots q_5$, je me guiderai du *second principe*.

J'écrirai l'équation

$$dz=z_1dx+z'dy$$

sous la forme

$$d\mu.dz-M_1dx-N'dy+dx.dz_1+dydz'=0,\ldots(C_1)$$

sachant que l'on a posé pour abréger

$$\begin{aligned}
M_1&=d\mu.z_1+dz_1\\
N'&=d\mu.z'+dz',
\end{aligned}$$

et que $d\mu$ est un facteur indéterminé.

Multipliant par dx (D'_1) et par Z_1 (C_1), retranchons la dernière de la première; il viendra

$$(Xdx+Z_1M_1)dx+(Ydx+N'Z_1)dy+(Zdx-d\mu Z_1)dz+$$
$$+(Z'dx-Z_1dy)dz'=0.$$

Déterminons le facteur $d\mu$ de manière à verifier l'équation

$$Zdx-Z_1d\mu=0;$$ nous aurons

$$(X_1dx+Z_1dz_1)dx+(Y_1dx+Z_1dz')dy+(Z'dx-Z_1dy)dz'=0,\quad\ldots(R_1)$$

où $X_1=X+Zz_1$, $Y_1=Y+Zz'$.

Reprenons maintenant les équations (S_1)

$$q_2dx-q_1dy=0,\quad dz=\frac{q_3}{q_1}dx,$$
$$q_4dx=q_1dz_1,\quad q_5dx=q_1dz'.$$

On voit d'abord que la relation $q_2dx=q_1dy$ permet de transformer

$$dz=z_1dx+z'dy$$

en celle-ci

$$dz=(q_1z_1+q_2z')\frac{dx}{q_1},$$

et que par conséquent on a

$$q_3=q_1z_1+q_2z'.$$

Faisant ensuite

$$q_1=Z_1,\quad q_2=Z',\quad q_4=-X_1,\quad q_5=-Y_1$$

de manière à réduire à zéro chacun des coefficients de l'équation (R_1), on trouve le système connu

$$Z_1dy-Z'dx=0$$
$$Y_1dx+Z_1dz'=0$$
$$X_1dx+Z_1dz_1=0$$

$$dz=(Z_1z_1+Z'z')\frac{dx}{Z_1},$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme des fractions

$$\frac{dx}{Z_1}=\frac{dy}{Z'}=\frac{dz}{Z_1z_1+Z'z'}=-\frac{dz_1}{X_1}=-\frac{dz'}{Y_1}\ldots\ldots\ldots(I_1).$$

5. On a vu que pour déterminer $q_1\ldots.q_5$ nous nous sommes guidés du second principe; c'est-à-dire que nous avons cherché à

vérifier la condition nécessaire et suffisante pour que les résultats des éliminations coïncident entre eux.

Pour éviter tout malentendu j'appuierai ce principe du raisonnement suivant:

Il est clair que la solution requise, si toutefois elle existe, ne saurait dépendre de la quantité que l'on éliminera de (D'_1); s'il en était autrement, le dit système n'aurait pas la généralité voulue. Or, du moment que nous avons posé

$$Z dx - Z_1 d\mu = 0,$$

l'identité ne pouvait plus avoir lieu à moins que tous les autres déterminants c. à. d. $X dx + Z_1 M_1$, $Y dx + Z_1 N'$, $Z' dx - Z_1 dy$ ne deviennent nuls séparément.

Cependant on aurait pu procéder aussi autrement.

Après avoir posé

$$q_1 = Z_1, \quad q_2 = Z', \quad q_3 = q_1 z_r + q_2 z',$$

prenons la somme des équations

$$Z_1 dy - Z' dx = 0$$

$$dz - (Z_1 z_1 + Z' z') \frac{dx}{Z_1} = 0$$

$$dz' - q_5 \frac{dx}{Z_1} = 0$$

$$Z_1 dz_1 - q_4 dx = 0,$$

multipliées respectivement la 1-re par $\frac{Y}{Z_1}$, la 2-me par Z, la 3-me par Z', et par 1 le dernière; nous trouverons

$$Y dy + Z dz + Z_1 dz_1 + Z' dz'$$

$$- \frac{Z'}{Z_1}(Y + Z z' + q_5) dx - (q_4 + Z z_1) dx = 0.$$

Comparant ce résultat à $dF = 0$, on voit que l'on peut poser, comme ci-dessus,

$$Y + Z z' + q_5 = 0, \quad q_4 + Z z_1 = -X.$$

6. L'existence du système (S_1) prouve que l'équation du 1-r ordre (D_1) est toujours réductible auz équations différentielles ordinaires; en effet, ajoutant les équations

$$dy - \frac{q_2}{q_1} dx = 0, \quad dz - (q_1 z_1 + q_2 z') \frac{dx}{q_1} = 0$$

$$dz_1 - \frac{q_4}{q_1}dx = 0,\ dz' - \frac{q_5}{q_1}dx = 0,$$

après avoir multiplié par Y la 1-re, par Z la 2-me, par Z_1 la 3-me, et par Z' la dernière, on trouvera d'abord

$$Ydy + Zdz + Z_1dz_1 + Z'dz' - \frac{dx}{q_1}[q_2Y_1 + q_1z_1Z + q_4Z_1 + q_5Z'] = 0,$$

et puis, en vertu de (d'_1),

$$Xdx + Ydy + Zdz + Z_1dz_1 + Z'dz' = 0;$$

ce qui prouve que la proposée est toujours incluse dans le dit système. Mais ceci n'est pas la condition *suffisante* pour que la solution possède la généralité requise; car il existe une infinité de valeurs propres à vérifier la condition (d'_1), et rien ne nous dit que les systèmes que l'on eut pu obtenir de cette manière fussent compris les uns dans les autres et tous dans un seul, comme c'est le cas à l'égard de (I_1).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F = 0$ soit réductible à un système d'équations différentielles ordinaires et du premier ordre, et que ce système ait la généralité voulue, ces conditions sont comprises dans les trois énoncés suivants:

1° *La proposée doit être incluse dans le dit système;*

2° *Les équations du système doivent être compatibles;*

et 3° *Tout autre système doit être la conséquence de celui-ci.*

Quant à la valeur de μ, on n'a pas besoin de la connaître, car rien n'empêche de remplacer $d\mu$ par n'importe quelle lettre, soit m; c'est-à-dire que l'intégration de

$$Zdx - Z_1d\mu = 0$$

n'est pas nécessaire.

7. On trouve dans le I-r Tome du „Recueil mathématique", publié en langue russe en 1866 par la société philomathique de Moscou, un mémoire du professeur A. Davidoff sur les équations aux dérivées partielles; l'auteur y prouve l'existence du système des équations différentielles ordinaires à l'égard de toute équation à deux variables indépendantes d'ordre quelconque. Le système existe en effet, mais les considérations à l'aide desquelles l'auteur arrive à ce résultat diffèrent de celles que j'expose dans ce chapitre. Voici en quoi consiste la méthode de M. Davidoff.

Soit, comme ci-dessus,

$$F(x,\ y,\ z,\ z_1,\ z') = 0$$

l'équation donnée, et changeons la variable indépendante y en

$$y=\varphi(x,\ u),$$

u étant une nouvelle variable indépendante et φ une fonction arbitraire des variables x et u.

On a

$$dz-z_1dx-z'dy=0,\quad \delta z-z_1\delta x-z'\delta y=0,$$

δ désignant, comme toujours, la variation de la quantité qu'elle affecte.

On tire de la première

$$\delta dz-dx.\delta z_1-dy.\delta z'-z_1d\delta x-z'd\delta y=0,$$

et de la seconde

$$d\delta z-dz_1.\delta x-dz'\ \delta y-z_1d\delta x-z'd\delta y=0.$$

Retranchant cette dernière de la précédente et ajoutant le résultat à l'équation $\delta z-z_1\delta x-z'\delta y=0$ mulipliée par un facteur indéterminé $d\mu$, on arrive à l'équation

$$-M_1\delta x-N'\delta y+d\mu\delta z_1+dx\delta z_1+dy\delta z'=0,$$

dans laquelle

$$M_1=d\mu.z_1+dz_1,\quad N'=d\mu z'+dz',$$

et à l'aide de laquelle nous éliminerons un élément quelconque, soit δz_1, de $\delta F=0$, c'est-à-dire de

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+Z_1\delta z_1+Z'\delta z'=0.$$

Effectuant donc la dite élimination et faisant dans le résultat

$$Zdx-Z_1d\mu=0,$$

on arrive à l'équation

$$(X_1dx+Z_1dz_1)\delta x+(Y_1dx+Z_1dz')\delta y+(Z'dx-Z_1dy)\delta z'=0,$$

$$X_1=X+Zz_1,\quad Y_1=Y+Zz',$$

à l'égard de laquelle il s'agit de démontrer la légitimité et la géneralité du système

$$X_1dx+Z_1dz_1=0,\ Y_1dx+Z_1dz'=0,\ Z'dx-Z_1dy=0$$

que l'on en tire en annulant les coefficients.

Pour cet effet en combinant l'équation

$$(X_1dx+Z_1dz_1)\delta x+(Y_1dx+Z_1dz')\delta y+(Z'dx-Z_1dy)\delta z'=0$$

avec

$$(X_1 dx + Z_1 dz_1)dx + (Y_1 dx + Z_1 dz')dy + (Z' dx - Z_1 dx)dz' = 0,$$

l'auteur arrive à l'équation

$$(X_1 dx + Z_1 dz_1) + (Y_1 dx + Z_1 dz')\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

dans laquelle $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ désigne la dérivée de y comme fonction de x. Enfin, comme il est permis de choisir la fonction arbitraire φ de manière à vérifier cette dernière condition, on obtient le système requis.

Il me semble que si l'équation

$$Z' dx - Z_1 dy = 0$$

est légitime, les deux autres le sont aussi, car les éléments dx, dy étant indépendants, on peut poser dans

$$(X_1 dx + Z_1 dz_1)dx + (Y_1 dx + Z_1 dz')dy = 0$$
$$X_1 dx + Z_1 dz_1 = 0, \quad Y_1 dx + Z_1 dz' = 0.$$

8. Nous ferons usage des équations

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + Z_1 \delta z_1 + Z'\delta z' = 0$$
$$-M_1 \delta x - N'\delta y + d\mu \delta z + dx\delta z_1 + dy\delta z' = 0$$

de la manière suivante.

Nous éliminerons l'un des cinq éléments, soit δz_1, et à l'aide de l'équation

$$Z dx - Z_1 d\mu = 0$$

nous arriverons à l'équation

$$(X_1 dx + Z_1 dz_1)\delta x + (Y_1 dx + Z_1 dz')\delta y + (Z' dx - Z_1 dy)\delta z' = 0.$$

Après cela nous appuierons la légitimité et la généralité du système

$$X_1 dx + Z_1 dz_1 = 0, \quad Y_1 dx + Z_1 dz' = 0$$
$$Z' dx - Z_1 dy = 0$$

des deux démonstrations suivantes:

1-re Démonstration.—Ce dernier système, si toutefois il est légitime, est nécessairement général, car il fait annuler en même temps tous les coefficients dans toutes les autres équations que l'on obtiendrait en éliminant tour à tour chacun des autres éléments au lieu de δz_1, de façon que ce système comprend en lui non seulement la proposée $F = 0$, mais aussi toutes les autres

solutions. De plus ce système est légitime, attendu que l'on a le droit de poser dans le système (S_1) $q_1 = Z_1$, $q_2 = Z'$, $q_4 = -X_1$.

2-de Démonstration. — Je prouverai d'abord l'existence du système (S_1), je ferai ensuite $q_1 = Z_1$, $q_2 = Z'$, $q_4 = -X_1$ de manière à annuler les coefficients de l'équation à trois termes, après quoi, invoquant le second principe (n° 2), je prouverai la généralité du système. Mais j'ajouterai toujours que la solution générale peut ne pas exister; si, en effet, les 4 équations

$$\begin{aligned} Z dx - Z_1 d\mu &= 0 \\ X_1 dx + Z_1 dz_1 &= 0 \\ Y_1 dx + Z_1 dz' &= 0 \\ Z' dx - Z_1 dy &= 0 \end{aligned}$$

sont incompatibles, bien que (S_1) existera toujours et comprendra en lui l'équation donnée $F = 0$, la solution ne pourra jamais devenir générale en ce sens que l'on ne pourra attribuer aux déterminants $q_1 \ldots q_5$ que des valeurs particulières non comprises dans le système général, lequel, par hypothèse, fournit des résultats absurdes.

Nous nous arrêtons un peu longtemps sur l'équation du 1-r ordre, mais c'est pour ne plus revenir aux propositions que nous regardons comme fondamentales et faciles à démontrer tant que l'équation est du 1-r ordre. On va voir maintenant que ce qui est vrai pour l'équation du 1-r ordre, reste vrai encore quand l'ordre devient quelconque et le nombre des variables indépendantes plus de deux.

§ 2. *Équations du 2^d ordre.*

9. En vertu de la notation du n° 1, l'équation donnée est actuellement

$$F(x, y, z, z_1, z', z_2, z'_1, z'') = 0 \ldots\ldots\ldots (D_2),$$

et la différentielle totale

$$X dx + Y dy + Z dz + Z_1 dz_1 + Z' dz' + Z_2 dz_2 + Z'_1 dz'_1 + Z'' dz'' = 0 \ldots (D'_2).$$

Au moyen de 7 équations de la forme

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dz_1 + a_5 dz' + a_6 dz_2 + a_7 dz'_1 + a_8 dz'' = 0$$

j'arrive d'abord à l'équation

$$\textit{Déterminant} = 0,$$

donc

$$X q_1 + Y q_2 + Z q_3 + Z_1 q_4 + Z' q_5 + Z_2 q_6 + Z'_1 q_7 + Z'' q_8 = 0, \ldots (d'_2)$$

laquelle fournit la relation

$$\frac{dx}{q_1}=\frac{dy}{q_2}=\ldots\ldots=\frac{dz''}{q_8}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S_2)$$

et sert à démontrer l'existence de la solution, c'est-à-dire du système d'équations différentielles ordinaires, qui comprennent en elles la proposée $F=0$.

Ce système donne en effet

$$Ydy+Zdz+Z_1dz_1+Z'dz'+Z_2dz_2+Z'_1dz'_1+Z''dz''$$
$$-\frac{dx}{q_1}(Yq_2+Zq_3+\ldots+Z''q_8)=0,$$

et, en vertu de (d'_2),

$$Xdx+Ydy+\ldots+Z''dz''=0,$$

ce qui est $dF=0$.

Du reste comme quelquesunes des équations (S_2) peuvent ne pas être indépendantes entre elles, c'est-à-dire que l'une d'elles peut être la conséquence des autres, et que d'ailleurs il s'agit de découvrir les valeurs les plus générales que l'on doive attribuer aux déterminants mineurs $q_1\ldots q_8$, afin que (S_2) comprenne en lui toutes les combinaisons que l'on peut déduire des données de la question, je prends en considération l'équation $\delta F=0$ et celles-ci:

$$dz^s{}_r-z^s{}_{r+1}dx-z_r{}^{s+1}dy=0.\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\delta z^s{}_r-z^s{}_{r+1}\delta x-z_r{}^{s+1}\delta y=0.\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Différentiant ces deux équations suivant les caractéristiques δ et d respectivement, j'obtiens

$$\delta dz^s{}_r-dx.\delta z^s{}_{r+1}-dy.\delta z_r{}^{s+1}-z^s{}_{r+1}\delta dx-z_r{}^{s+1}\delta dy=0$$
$$d\delta z^s{}_r-dz^s{}_{r+1}\delta x-dz_r{}^{s+1}\delta y-z^s{}_{r+1}d\delta x-z_r{}^{s+1}d\delta y=0.$$

Retranchant la première de la dernière et ajoutant le résultat à l'équation (2) multipliée par un facteur indéterminé $d\mu^s{}_r$, il vient

$$-M^s{}_{r+1}\delta x-N_r{}^{s+1}\delta y+d\mu^s{}_r\delta z+dx\delta z^s{}_{r+1}+dy\delta z_r{}^{s+1}=0.$$

Au moyen de cette formule et $\delta F=0$ on va connaître toutes les combinaisons que l'on peut tirer légitimement de la proposée.

Toutefois j'obsèrve que les valeurs de $M^s{}_{r+1}$ et de $N_r{}^{s+1}$ restant les mêmes, c'est à-dire

$$\left.\begin{aligned}M^s{}_{r+1}&=d\mu^s{}_rz^s{}_{r+1}+dz^s{}_{r+1}\\N_r{}^{s+1}&=d\mu^s{}_rz_r{}^{s+1}+dz_r{}^{s+1},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

on peut obtenir les combinaisons cherchées sans recourir aux variations et en se contentant de l'équation $dF=0$ et de celle-ci

$$d\mu^s{}_r \cdot dz^s{}_r - M^s{}_{r+1}dx - N_r{}^{s+1}dy + dxdz^s{}_{r+1} + dydz_r{}^{s+1} = 0 \ldots . (4).$$

Cette observation est très-importante, car lorsque nous aurons obtenu l'équation de la forme

$$A\delta x + B\delta y + D\delta z^s{}_r = 0,$$

à trois termes, nous saurons que simultanément avec celle-ci aura lieu l'équation

$$Adx + Bdx + Dz^s{}_r = 0.$$

10. Attribuons à r et s, dans la formule (4) toutes les valeurs propres à vérifierles deux équations $r+s=0$, $r+s=1$ séparément, sachant que ces deux lettres représentent des entiers positifs: nous aurons conjointement avec $\delta F = 0$ les quatre équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + Z_1\delta z_1 + Z'\delta z' + Z_2\delta z_2 + Z'_1\delta z'_1 + Z''\delta z'' = 0\\
&-M_1\delta x - N'\delta y + d\mu\delta z + dx\delta z_1 + dy\delta z' + 0 + 0 + 0 = 0\\
&-M_2\delta x - N'_1\delta y + 0 + d\mu_1\delta z_1 + 0 + dx\delta z_2 + dy\delta z'_1 + 0 = 0\\
&-M'_1\delta x - N''\delta y + 0 + 0 + d\mu'\delta z' + 0 + dx\delta z'_1 + dy\delta z'' = 0.
\end{aligned}$$

Ces équations se prêtent à la formation de $\frac{8.7.6}{2.3} = 56$ nouvelles équations, car tel est le nombre des combinaisons que peut fournir l'élimination des 8 éléments pris trois à trois. Mais si la solution générale est possible, c'est-à-dire que si le système des équations différentielles ordinaires existe, on l'obtiendra en égalant à zéro les coefficients dans une seule des 56 combinaisons; et c'est à l'aide de ce seul moyen qu'il est possible d'identifier tous les 56 résultats, de façon que toutes les équations du système soient indépendantes entre elles, c'est-à-dire qn'aucune d'elles ne soit la conséquence des autres.

Le choix des éléments étant ainsi arbitraire, nous éliminerons les variations δz_1, δz_2, $\delta z'_1$.

Pour cet effet, suivant les règles connues de l'élimination, ajoutons ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les déterminants

$$\begin{vmatrix} dx, & 0, & 0 \\ d\mu_1, & dx, & dy \\ 0, & 0, & dx \end{vmatrix} = dx^3, - \begin{vmatrix} Z_1, & Z_2, & Z'_1 \\ d\mu, & dx, & dy \\ 0, & 0, & dx \end{vmatrix} = -\left(Z_1 - Z_2\frac{d\mu_1}{dx}\right)dx^2,$$

$$\begin{vmatrix} Z_1, & Z_2, & Z'_1 \\ dx, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & dx \end{vmatrix} = -Z_2 dx^2, - \begin{vmatrix} Z_1, & Z_2, & Z'_1 \\ dx, & 0, & 0 \\ d\mu_1, & dx, & dy \end{vmatrix} = -\left(Z'_1 - Z_2 \frac{dy}{dx}\right) dx^2;$$

nous aurons, après réduction, l'équation

$$\left[X dx + M_1 \left(Z_1 - Z_2 \frac{d\mu_1}{dx}\right) + Z_2 M_2 + M'_1 \left(Z'_1 - Z_2 \frac{dy}{dx}\right) \right] \delta x$$

$$+ \left[Y dx + N' \left(Z_1 - Z_2 \frac{d\mu_1}{dx}\right) + Z_2 N'_1 + N'' \left(Z'_1 - Z_2 \frac{dy}{dx}\right) \right] \delta y$$

$$+ \left[Z dx + \left(Z_2 \frac{d\mu_1}{dx} - Z_1\right) d\mu \right] \delta z +$$

$$+ \left[Z' dx + \left(Z_2 \frac{d\mu_1}{dx} - Z_1\right) dy + d\mu' \left(Z_2 \frac{dy}{dx} - Z'_1\right) \right] \delta z'$$

$$+ \left[Z'' - Z'_1 \frac{dy}{dx} + Z_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx . \delta z'' = 0,$$

dans laquelle nous ferons

$$Z dx + \left(Z_2 \frac{d\mu_1}{dx} - Z_1\right) d\mu = 0,$$

$$Z' dx + \left(Z_2 \frac{d\mu_1}{dx} - Z_1\right) dy + d\mu' \left(Z_2 \frac{dy}{dx} - Z'_1\right) = 0,$$

et, pour abréger,

$$A = X_1 dx + Z_2 dz_2 + \left(Z'_1 - Z_2 \frac{dy}{dx}\right) dz'_1,$$

$$B = Y_1 dx + Z_2 dz'_1 + \left(Z'_1 - Z_2 \frac{dy}{dx}\right) dz''$$

$$D = Z'' - Z'_1 \frac{dy}{dx} + Z_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \text{ sachant que}$$

X_1, Y_1 représentent, comme toujours, les dérivées totales par rapport à x et y respectivement, donc

$$X_1 = X + Z z_1 + Z_1 z_2 + Z' z'_1$$
$$Y_1 = Y + Z z' + Z' z'' + Z_1 z'_1;$$

nous obtiendrons de cette manière l'équation à trois termes

$$A \delta x + B \delta y + D dx . \delta z'' = 0.$$

Deux des trois quantités $d\mu^s_r$ se déterminent et la troisième reste arbitraire.

Maintenant, en s'appuyant sur le raisonnement que l'on vient de faire on pourrait poser de suite $A=0$, $B=0$ $D=0$; mais il est préférable d'attribuer à q_1, q_2 et q_8 dans (S_2) les valeurs $q_1=Z'_1-Z_2\frac{dy}{dx}$, $q_2=Z''$, $q_8dx=-(Z_1dx+Z_2dz'_1)$, et ne se servir du dit raisonnement que pour prouver que toutes les autres valeurs que l'on aurait pu attribuer à ces déterminants seraient des conséquences de celles-ci.

En vertu de ces valeurs de q_1, q_2, q_8 on a $D=0$, $B=0$, et, par suite, $A=0$.

La solution générale se présente donc sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} &X_1dxdy+Z_2dz_2dy+Z''dz'_1dx=0\\ &Y_1dxdy+Z_2dz'_1dy+Z''dz''dx=0\\ &Z''-Z'_1\frac{dy}{dx}+Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0\\ &dz=z_1dx+z'dy\\ &dz_1=z_2dx+z'_1dy\\ &dz'=z'_1dx+z''dy. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(I_2).$$

Les trois dernières se transforment en celles-ci:

$$\begin{aligned} q_1dz&=(q_1z_1+q_2z')dx\\ q_1dz_1&=(q_1z_2+q_2z'_1)dx\\ q_1dz'&=(q_1z'_1+q_2z'')dx. \end{aligned}$$

Si l'intégration s'effectue, on éliminera entre les intégrales z'', z'_1 et z_2 et l'équation qui en résultera sera encore aux dérivées partielles, mais du 1-r ordre.

Enfin si le système trouvé est incompatible, en sorte que, par exemple, les équations en $d\mu^s_r$ fournissent des résultats absurdes, on ne pourra plus attribuer aux quantités q_1, q_2, q_8 que des valeurs particulières, et, par conséquent, la solution elle-même ne sera ou bien qu'une solution particulière, ou bien une solution singulière. Si, au contraire, les deux équations en $d\mu^s_r$ sont compatibles tandis que $A=0$, $B=0$ et $D=0$ ne le sont point, on aura l'équation

$$Adx+Bdy+Ddxdz''=0,$$

laquelle conjointement avec le système (S_2) fournira encore soit plusieurs solutions particulières, soit des solutions singulières.

La solution générale comprise dans le système (I_2) a été proposée pour la première fois, comme je l'ai déjà dit, par M. Davidoff; on va voir maintenant que notre méthode s'étend aussi aux équations d'ordre quelconque, et conduit par d'autres voies à la solution trouvée par M. Davidoff.

§ 3. *Équations de l'ordre n.*

11. On a vu comment se déduit l'équation fondamentale

$$-M^s_{r+1}\delta x - N_r^{s+1}\delta y + d\mu^s_r\ \delta z^s_r + dx.\delta z^s_{r+1} + dy\delta z_r^{s+1} = 0, \ldots (A)$$

les valeurs de M^s_{r+1} et de N_r^{s+1} étant

$$M^s_{r+1} = d\mu^s_r z^s_{r+1} + dz^s_{r+1}$$
$$N_r^{s+1} = d\mu^s_r z_r^{s+1} + dz_r^{s+1}.$$

Il est visible qu'elle se rapporte à l'équation

$$F(x,\ y,\ z,\ z_1,\ z' \ldots z^s_r \ldots z^n) = 0$$

d'ordre quelconque.

Cette formule (A) représente $\frac{n(n+1)}{2}$ équations, car tel est le nombre des valeurs positives et entières que peuvent prendre les indices r, s dans le système

$$r+s=0, \quad r+s=1, \ldots r+s=n-1;$$

donc conjointement avec la variation totale $\delta F=0$ on a $\frac{n(n+1)}{2}+1$ équations que nous écrirons pour abréger sous la forme

$$X\delta x + Y\delta y + \Sigma Z^s_{r+1}\delta z^s_{r+1} + \Sigma Z^s_r \delta z^s_r + Z^{(n)}.\delta z^{(n)} = 0$$
$$-M^s_{r+1}\delta x - N_r^{s+1}\delta y + dx.\delta z^s_{r+1} + d\mu^s_r \delta z^s_r + dy\delta z^{(n)} = 0.$$

La troisième et la quatrième colonnes peuvent être éliminées d'adord par les règles ordinaires de l'élimination et puis en attribuant aux facteurs indéterminés $d\mu^s_r$ des valeurs propres à satisfaire aux n équations comprises dans l'équation symbolique

$$\Sigma Z^s_r dx - d\mu^s_r \Sigma Z^s_{r+1} = 0.$$

Et comme ces n équations contiendront en elles $\frac{n(n+1)}{2}$ incon-

nues, on ne déterminera que n d'entre elles, les autres seront arbitraires.

Le total des variations éliminées sera donc $\frac{n(n+3)}{3}$, et, en posant pour abréger

$$D^{(n)}=Z^{(n)}-Z_1^{(n-1)}\frac{dy}{dx}+Z_2^{(n-2)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-+\ -\ldots(-1)^nZ_n\left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

$$D^{(i)}{}_{n-i}=-(-1)^i\left\{Z_n\left(\frac{dy}{dx}\right)^i-Z'_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{i-1}+\right.$$

$$\left.+Z''_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{i-2}-\ldots+(-1)^iZ^i_{n-i}\right\},$$

où $i<n$,

$$A=X_1dx-(D_ndz_n+D'_{n-1}dz'_{n-1}+\ldots+D_1{}^{(n-1)}.dz_1{}^{(n-1)})$$

$$B=Y_1dx-(D_ndz'_{n-1}+D'_{n-1}dz''_{n-2}+\ldots+D_1{}^{(n-1)}.dz^{(n)}),$$

X_1, Y_1 étant, comme toujours, les dérivées totales de F par rapport à x, y respectivement lorsque les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de z ne varient point, on aura l'équation à trois termes

$$A\delta x+B\delta y+D^{(n)}.dx.\delta z^{(n)}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(R)$$

12. Pour démontrer ensuite que la solution générale, si toutefois elle existe, est comprise dans les

$$\frac{n(n+1)}{2}+3$$

équations du système

$$A=0,\quad B=0,\quad D^{(n)}=0$$

$$dz^s{}_r=dx.z^s{}_{r+1}+dy.z_r{}^{s+1},$$

$$r+s=0,\ 1,\ 2\ldots,(n-1),$$

je commencerai par établir l'existence du système indéterminé

$$\frac{dx}{q_1}=\frac{dy}{q_2}=\frac{dz}{q_3}=\ldots=\frac{dz^{(n)}}{q_m},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S_n)$$

dans lequel j'ai posé, pour abréger, $m=\frac{n(n+3)}{2}+3$.

Pour cet effet j'égalerai à zéro le déterminant $Xq_1+Yq_2+Zq_3+\ldots+Z^{(n)}q_m$, du système des m équations dont l'une est $dF=0$

et les $m-1$ restantes à coefficients indéterminés de la forme $a_1dx+a_2dy+\ldots+a_mdz^{(n)}=0$; la comparaison des deux équations

$$dF=0$$
$$D=0,$$

D étant le dit déterminant, fournira (S_n).

De ces m quantités q il y en aura $\frac{n(n+1)}{2}$ que l'on pourra déterminer immédiatement, attendu que l'on a $q_1dz^s{}_r=(q_1z^s{}_{r+1}+\ldots+q_2z_r{}^{s+1})dx$; quant aux valeurs générales des autres déterminants mineurs q, je vais démontrer qu'elles sont précisément celles que fournissent les équations

$$A=0,\ B=0,\ D^{(n)}=0.$$

Je reconnais qu'en changeant le groupe des variations éliminées j'aurais pu obtenir autant de ces équations à trois termes, de la forme (R), qu'il existe des combinaisons entre $\frac{n(n+3)}{2}+3$ éléments $\frac{n(n+1)}{2}$ à $\frac{n(n+1)}{2}$, et toutes ces équations doivent fournir les mêmes valeurs aux déterminants q, si toutefois la solution générale existe; mais la condition nécessaire et suffisante pour que toutes ces équations deviennet identiques entre elles est précisément comprise dans les équations

$$A=0,\ B=0,\ D^{(n)}=0;$$

donc les valeurs de q_1, q_2, q_m doivent être celles-ci:

$$q_1=-D_1{}^{(n-1)},\ q_2=Z^{(n)},$$
$$q_m=-Y_1+\frac{1}{dx}[D_ndz'_{n-1}+D'_{n-1}dz''_{n-2}+\ldots+D_2{}^{n-2}dz_1{}^{(n-1)}],$$

ou, plus correctement, celles qui peuvent annuler les coefficients A, B, $D^{(n)}$ à la fois.

Ou, autrement, je disposerai des q_1, q_2, q_m de manière à obtenir les équations $A=0$, $B=0$, $D^{(n)}=0$, après quoi je reconnaîtrai, en m'appuyant sur le *second principe* (n° 2), que ces valeurs sont générales, attendu que toutes les autres en sont des conséquences.

Il est donc vrai, que la solution générale, si toutefois elle existe, est comprise dans le système trouvé par M. Davidoff,

c'est-à-dire: dans les n équations à $\frac{n(n+1)}{2}$ facteurs $d\mu^s{}_r$, les trois équations $A=0$, $B=0$, $D^{(n)}=0$, et les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations contenues dans la formule

$$dz^s{}_r = z^s{}_{r+1}dx + z_r{}^{s+1}dy.$$

13. Il n'est pas difficile de trouver la raison phylosophique qui fait que l'on cherche la solution dans l'élimination et la réduction à zéro des coefficients dans les résultats des éliminations.

En effet, il est visible d'abord, que trouver une seule intégrale première de l'équation $F=0$ de l'ordre n, c'est-à-dire l'abaisser d'une seule unité, ou bien d'abaisser de deux unités à la fois la différentielle $dF=0$, c'est résoudre un seul et même problème; et que si la dernière forme, $dF=0$, est préférable à la première, c'est parce que le nombre des données augmente, donc la question devient moins indéterminée. La variation de la surface, exprimée par la caractéristique δ, ne change en rien la question, attendu que, en la laissant invariable, on a encore $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions comprises dans la formule

$$d\mu^s{}_r dz^s{}_r - M^s{}_{r+1}dx + N_r{}^{s+1}dy - dxdz^s{}_{r+1} + dydz_r{}^{s+1} = 0. \quad ..(A_1),$$

$M^s{}_{r+1}$, $N_r{}^{s+1}$ désignant comme plus haut, les quantités

$$d\mu^s{}_r z^s{}_{r+1} + dz^s{}_{r+1},$$
$$d\mu^s{}_r z_r{}^{s+1} + dz_r{}^{s+1}$$

respectivement. On s'assure donc que les seules données de la question sont: 1° les différentielles totales de $F=0$, et 2° la formule (A_1).

Il est encore visible que si la solution existe, elle ne peut être que le résultat de quelque combinaison entre les données de la question. Or, éliminer un élément c'est lui attribuer une certaine valeur, et, par hypothèse, la solution doit être la même quels que soient les éléments éliminés, donc l'élimination et la réduction à zéro des coefficients dans le résultat sont les seules opérations qui peuvent conduire à la solution requise.

14. Je proposerai pour premier exemple à l'appui de la théorie

exposée dans les n-os précédents l'équation du 2-d ordre réductible à la forme

$$Z_2 z_2 + Z'_1 z'_1 + Z' z'' = V,$$

V étant une fonction quelconque des quantités x, y, z, z_1, z'.

La solution est comprise, comme on sait, dans les trois équations suivantes:

$$Z_2 dy^2 - Z'_1 dx dy + Z'' dx^2 = 0$$
$$Z_2 dz_1 dy + Z'' dz' dx - V dx dy = 0$$
$$dz - z_1 dx - z' dy = 0.$$

Il s'agit de déduire ce système de celui de M. Davidoff [n° 9, (I_2)].

On voit que la troisième équation de ce dernier système coïncide avec la 1-re du système considéré; de même l'équation $dz - z_1 dx - z' dy = 0$ est commune aux deux systèmes. On va voir que les équations

$$\left.\begin{array}{l} dz_1 = z_2 dx + z'_1 dy \\ dz' = z'_1 dx + z'' dx \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

fournissent l'équation

$$Z_2 dz_1 dy + Z'' dz' dx - V dx dy = 0 \ldots\ldots\ldots (b).$$

Multipliant par $Z_2 dy$ la 1-re des équations (a), par $Z'' dx$ la dernière, et faisant la somme des deux, il vient

$$Z_2 dz_1 dy + Z'' dz' dx = dy dx (Z_2 z_2 + Z'' z'') + z'_1 (Z_2 dy^2 + Z'' dx^2).$$

Mais $$Z_2 dy^2 + Z'' dx^2 = Z'_1 dx dy,$$

et $$Z_2 z_2 + Z'_1 z_1 + Z' z'' = V;$$

donc $$Z_2 dz_1 dy + Z'' dz' dx = V dx dy.$$

Ce qui est l'équation (b).

Pour second exemple soit

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = z$$

la proposée.

Les deux équations en $d\mu^s_r$ donnent

$$dx = 0, \quad d\mu' = 0.$$

Et comme le système (I_2) donne aussi $dy = 0$, on remplacera les trois premières équations par l'équation unique

$$q_1 dz'_1 + q_2 dz'' - q_3 dy = 0.$$

Cette dernière devant contenir en elle la proposée, on la décomposera en ces deux autres

$$dz'_1 + \frac{q_2}{q_1}\,dz'' - \frac{q_3}{q_1}\,dy = 0$$

$$dz - \frac{q_3}{q_1}\,dy + \frac{q_2}{q_1}\,dz'' = 0.$$

Par suite on voit que la question est indéterminée.

Comme dernier exemple, empruntons à M. Davidoff l'équation

$$x^2 z_2 + 2xyz'_1 + y^2 z'' = 0,$$

dans laquelle, suivant la notation admise, z_2 remplace $\frac{d^2z}{dx^2}$, $z'_1 = \frac{d^2z}{dxdy}$, $z'' = \frac{d^2z}{dy^2}$.

Le système devient actuellement

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$(2xz_2 + 2yz'_1)\,dydx + x^2dz_2dy + y^2dz'_1dx = 0$$

$$(2xz'_1 + 2yz'')\,dydx + x^2dz'_1dy + y^2dz''dx = 0.$$

La première donne

$$ydx - xdy = 0,$$

$$y = \alpha x.$$

Éliminant à l'aide de cette relation y de la troisième équation, nous trouvons

$$x^2\frac{dz'_1}{dx} + 2xz'_1 + 2\alpha xz'' + \alpha x^2\frac{dz''}{dx} = 0;$$

ce qui est

$$d[x^2(z'_1 + \alpha z'')] = 0,$$

donc

$$x^2(z'_1 + \alpha z'') = \beta.$$

Puis, de la seconde équation du système,

$$z_2 + 2\alpha z'_1 + \alpha^2 z'' = 0,$$

donc

$$z_2 + \alpha z'_1 = -\frac{\alpha\beta}{x^2}.$$

Enfin, les deux dernières équations du même système (I_2) donneront

$$dz_1 = z_2dx + z'_1dy = (z_2 + \alpha z'_1)dx = -\frac{\alpha\beta\,.\,dx}{x^2},$$

$$dz' = z'_1 dx + z'' dy = (z'_1 + \alpha z'')dx = \frac{\beta dx}{x^2}.$$

D'où $$z_1 = \frac{\alpha\beta}{x} + \gamma,\ z' = -\frac{\beta}{x} + \gamma_1.$$

Et comme

$$dz = z_1 dx + z' dy = (z_1 + \alpha z')dx = (\gamma + \alpha\gamma_1)dx,$$

il vient

$$z = (\gamma + \alpha\gamma_1)x + \gamma_2.$$

La solution se présente donc sous la forme suivante:

$$z = x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

§ 4. *Équations à plus de deux variables indépendantes.*

15. Soit

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ z,\ p_1,\ p_2,\ p_3) = 0$$

l'équation donnée à trois variables indépendantes x_1, x_2, x_3, une seule fonction z de ces variables, et

$$p_i = \frac{dz}{dx_i}.$$

Nous adopterons la notation

$$\frac{dF}{dx_i} = X_i,\quad \frac{dF}{dz} = Z,\quad \frac{dF}{dp_i} = P_i.$$

De l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

nous tirerons

$$\delta dz = dx_1 \delta p_1 + dx_2 \delta p_2 + dx_3 \delta p_3 + p_1 \delta dx_1 + p_2 \delta dx_2 + p_3 \delta dx_3 \ldots (1')$$

Et de

$$\delta z = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + p_3 \delta x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$d\delta z = dp_1 . \delta x_1 + dp_2 . \delta x_2 + dp_3 \delta x_3 + p_1 d\delta x_1 + p_2 d\delta x_2 + p_3 d\delta x_3. \quad (2')$$

Retranchant cette dernière de (1'), il vient

$$-dp_1 \delta x_1 - dp_2 \delta x_2 - dp_3 \delta x_3 + dx_1 \delta p_1 + dx_2 \delta p_2 + dx_3 \delta p_3 = 0.$$

Prenons enfin la somme de cette dernière et de (2) multipliée par un facteur indéterminé $d\mu$; nous arriverons à la formule

$$-M_1 \delta x_1 - M_2 \delta x_2 - M_3 \delta x_3 - d\mu . \delta z + dx_1 \delta p_1 + dx_2 \delta p_2 + dx_3 \delta p_3 = 0 \ldots . (A)$$

$$M_1 = d\mu . p_1 + dp_1$$
$$M_2 = d\mu . p_2 + dp_2$$
$$M_3 = d\mu . p_3 + dp_3,$$

à l'aide de laquelle nous pourrons effectuer l'élimination de l'un des éléments contenus dans $\delta F = 0$, soit, par exemple, δp_1; nous poserons ensuite

$$Z dx_1 - P_1 d\mu = 0$$

dans le résultat, et nous obtiendrons enfin l'équation à 5 termes

$$A_1 \delta x_1 + A_2 \delta x_2 + A_3 \delta x_3 + D_1 \delta p_2 + D_2 \delta p_3 = 0, \ldots\ldots (R_1)$$

les valeurs de ces coefficients étant

$$A_1 = X'_1 dx_1 + P_1 dp_1, \quad A_2 = X'_2 dx_1 + P_1 dp_2,$$
$$A_3 = X'_3 dx_1 + P_1 dp_3, \quad D_1 = P_2 dx_1 - P_1 dx_2,$$
$$D_2 = P_3 dx_1 - P_1 dx_3,$$

et $\quad X'_1 = X_1 + Z p_1, \quad X'_2 = X_2 + Z p_2, \quad X'_3 = X_3 + Z p_3.$

Mais nous avons aussi

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + Z dz + P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 = 0,$$

et à l'aide de six équations à coefficients indéterminés, de la forme

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots\ldots + a_7 dp_3 = 0,$$

nous pouvons former d'abord l'équation *Déterm.* $= 0$, donc

$$X_1 q_1 + X_2 q_2 + \ldots\ldots + q_7 P_3 = 0,$$

et puis le système

$$\frac{dx_1}{q_1} = \frac{dx_2}{q_2} = \ldots\ldots = \frac{dp_3}{q_7}.$$

Faisant dans ce dernier

$$q_1 = P_1, \; q_2 = P_2, \; q_3 = P_3, \; q_5 = -X_1, \; q_6 = -X'_2, \; q_7 = -X'_3,$$

nous arrivons au système requis

$$X'_1 dx_1 + P_1 dp_1 = 0$$
$$X'_2 dx_1 + P_1 dp_2 = 0$$
$$X'_3 dx_1 + P_1 dp_3 = 0$$
$$P_2 dx_1 - P_1 dx_2 = 0$$
$$P_3 dx_1 - P_1 dx_3 = 0$$

$$dz = (P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3) \frac{dx_1}{P_1}.$$

Ce système constitue la solution générale, parce que toutes les équations de la forme (R_1) que l'on peut déduire au moyen de l'élimination deviennent par là identiques, et que ce système comprend en lui en même temps la proposée $F = 0$.

On peut lui donner la forme symétrique

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = \frac{dz}{P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3} = -\frac{dp_1}{X'_1} = -\frac{dp_2}{X'_2} = -\frac{dp_3}{X'_3}.$$

Exemple. — $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = az + \frac{x_1x_2}{x_3}$,

a étant une constante quelconque, et p_i, comme ci-dessus, $\frac{dz}{dx_i}$.

Le système est actuellement

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dz}{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3} =$$

$$= \frac{dp_1}{(a-1)p_1 + \frac{x_2}{x_3}} = \frac{dp_2}{(a-1)p_2 + \frac{x_1}{x_3}} = \frac{dp_3}{(a-1)p_3 - \frac{x_1x_2}{x_3^2}}.$$

Les trois premières donnent

$$\frac{x_2}{x_1} = \alpha, \quad \frac{x_3}{x_1} = \beta; \text{ par suite } \frac{x_2}{x_3} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{x_1x_2}{x_3^2} = \frac{\alpha}{\beta_2},$$

$$(a-1)\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dp_1}{p_1 + \frac{\alpha}{(a-1)\beta}} = \frac{dp_2}{p_2 + \frac{1}{(a-1)\beta}} = \frac{dp_3}{p_3 - \frac{\alpha}{(a-1)\beta^2}}.$$

D'où

$$p_1 + \frac{\alpha}{a-1)\beta} = \gamma\, x_1^{a-1}, \quad p_2 + \frac{1}{(a-1)\beta} = \gamma_1 x_1^{a-1},$$

$$p_3 - \frac{\alpha}{(a-1)\beta^2} = \gamma_2 . x_1^{a-1}.$$

Sommant ces équations après avoir multiplié par x_1 la 1-re par x_2 la 2-me, par x_3 la dernière, et substituant la valeur de $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$ ainsi obtenue dans l'équation

$$\frac{dx_1}{x_1}(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) = dz,$$

il vient

$$(a-1)x_1^{a-1}(\gamma + \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)dx_1 = (a-1)dz + \frac{\alpha}{\beta}dx_1.$$

D'où $$x_1^{\alpha}.\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1}\right)=(\alpha-1)z+\frac{x_1x_2}{x_3},$$

Φ désignant une fonction arbitraire des quantités qu'elle affecte.

16. Ici s'arrête la généralisation de la méthode que nous venons d'exposer. En effet soit

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ z,\ z_1,\ z',\ z_{0,1},\ z'',\ z',\ z'_{0,1}\ldots z^{(n)}=0$$

l'équation à trois variables indépendantes, sachant que l'on a

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma}z}{dx_1^{\alpha}dx_2^{\beta}dx_3^{\gamma}}=z^{\alpha}_{\beta,\gamma},\quad X_i=\frac{dF}{dx_i},\quad Z^{\alpha}_{\beta,\gamma}=\frac{dF}{dz^{\alpha}_{\beta,\gamma}}.$$

Les deux équations

$$dx^{\alpha}_{\beta,\gamma}=z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}\,dx_1+z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}\,dx_2+z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}\,dx_3$$

$$\delta z^{\alpha}_{\beta,\gamma}=z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}\,\delta x_1+z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}\delta x_2+z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}\delta x_3$$

fourniront la formule

$$-M^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}\delta x_1-N^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}\delta x_2-P^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}\delta x_3+d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}\delta z^{\alpha}_{\beta,\gamma}+$$

$$dx_1\delta z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}+dx_2\delta z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}+dx_3\delta z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}=0,$$

dans laquelle on a posé pour abréger

$$M^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}=d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}.\ z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}+dz^{\alpha+1}_{\beta,\gamma},\quad N^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}=d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}.\ z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}+dz^{\alpha}_{\beta+1,\gamma},$$

$$P^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}=d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}.\ z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}+dz^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}.$$

Attribuant ensuite aux indices α, β, γ toutes les valeurs positives et entières déterminées par les équations

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha+\beta+\gamma=1,\ldots\alpha+\beta+\gamma=n-1,$$

nous trouverons $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ équations qui avec la variation $\delta F=0$ permettront d'éliminer $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ variations; de plus, comme on pourra disposer convenablement des $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ facteurs $d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ termes disparaitront encore; de façon que de l'équation à $\frac{n}{6}(n^2+6n+11)+4$ éléments on tirera

un résultat qui contiendra en lui non pas le nombre constant, 5 termes, mais le nombre variable $n+4$. Il s'en suit que 5 de ces coefficients égalés à zéro, conjointement aves les équations conditionnelles

$$dz^{\alpha}_{\beta,\gamma} = z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}.\ dx_1 + z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma} dx_2 + z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1} dx_3$$

ne constitueront la solution requise que si les $n-1$ coefficients restants sont nuls. Donc l'équation de l'ordre n aura $n-1$ relations conditionnelles entre les quantités données $Z^{\alpha}_{\beta,\gamma}$. C'est ce que nous avions voulu établir.

17. Supposant $n=2$, l'élimination s'effectuera entre les 5 équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + X_3\delta x_3 + Z\delta z + Z'\delta z' + Z_1\delta z_1 + Z_{0,1}\delta z_{0,1} \\
&+ Z''\delta z'' + Z'_1\delta z'_1 + Z'_{0,1}\delta z'_{0,1} + Z_2\delta z_2 + Z_{1,1}\delta z_{1,1} + Z_{0,2}\delta z_{0,2} = 0 \\
&- M'\delta x_1 - N_1\delta x_2 - P_{0,1}\delta x_3 + d\mu\delta z + dx_1\delta z' + dx_2\delta z_1 + dx_3\delta z_{0,1} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\
&- M''\delta x_1 - N_1'\delta x_2 - P'_{0,1}\delta x_3 + 0 + d\mu'\delta z' + 0 + 0 \\
&+ dx_1\delta z'' + dx_2\delta z'_1 + dx_3\delta z'_{0,1} + 0 + 0 + 0 = 0 \\
&- M'_1\delta x_1 - N_2\delta x_2 - P_{1,1}\delta x_3 + 0 + 0 + d\mu_1\delta z_1 + 0 \\
&+ 0 + dx_1\delta z'_1 + 0 + dx_2\delta z_2 + dx_3\delta z_{1,1} + 0 = 0 \\
&- M'_{0,1}\delta x_1 - N_{1,1}\delta x_2 - P_{0,2}\delta x_3 + 0 + 0 + 0 + d\mu_{0,1}\delta z_{0,1} \\
&+ 0 + 0 + dx_1\delta z'_{0,1} + 0 + dx_2\delta z_{1,1} + dx_3\delta z_{0,2} = 0.
\end{aligned}$$

Eliminons par exemple les 4 colonnes dans lesquelles entre dx_1.

Pour cet effet, multipliant par dx_1 la 1-re, par $Z''\frac{d\mu'}{dx_1} - Z'$ la 2-me, par $-Z''$ la 3-me, par $Z''\frac{dx_2}{dx_1} - Z'_1$ la 4-me, par $Z''\frac{dx_3}{dx_1} - Z'_{0,1}$ la dernière, ajoutons les résultats; après quoi déterminons les facteurs $d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}$ de manière à vérifier les équations

$$Z_{0,1} + Z''\frac{dx_3}{dx_1}\left(\frac{d\mu'}{dx_1} + \frac{d\mu_{0,1}}{dx_1}\right) - Z'\frac{dx_3}{dx_1} - Z'_{0,1}\frac{d\mu_{0,1}}{dx_1} = 0$$

$$Z' + Z''\frac{dx_2}{dx_1}\left(\frac{d\mu'}{dx_1} + \frac{d\mu_1}{dx_1}\right) - Z'\frac{dx_2}{dx_1} - Z'_1\frac{d\mu_1}{dx_1} = 0,$$

$$Z - \frac{d\mu}{dx_1}\left(Z' - Z''\frac{d\mu_1}{dx_1}\right) = 0;$$

alors disparaîtront les termes $\delta z_{0,1}$, δz_1, δz, et il viendra

$$A_1\delta x_1 + A_2\delta x_2 + A_3\delta x_3 + (D_2\delta z_2 + D_{1,1}\delta z_{1,1} + D_{0,2}\delta z_{0,2})\,dx_1 = 0.$$

On a posé pour abréger

$$A_1 = X'_1 dx_1 + Z'' dz'' + \left(Z'_1 - Z''\frac{dx_2}{dx_1}\right)dz'_1 + \left(Z'_{0,1} - Z''\frac{dx_3}{dx_1}\right)dz'_{0,1}$$

$$A_2 = X'_2 dx_1 + Z'' dz'_1 + \left(Z'_1 - Z''\frac{dx_2}{dx_1}\right)dz_2 + \left(Z'_{0,1} - Z''\frac{dx_3}{dx_1}\right)dz_{1,1},$$

$$A_3 = X'_3 dx_1 + Z'' dz'_{0,1} + \left(Z'_1 - Z''\frac{dx_2}{dx_1}\right)dz_{1,1} + \left(Z'_{0,1} - Z''\frac{dx_3}{dx_1}\right)dz_{0,2},$$

$$D_2 = Z_2 - Z'_1\frac{dx_2}{dx_1} + Z''\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2,$$

$$D_{0,2} = Z_{0,2} - Z'_{0,1}\frac{dx_3}{dx_1} + Z''\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2,$$

$$D_{1,1} = Z_{1,1} - Z'_1\frac{dx_3}{dx_1} - Z'_{0,1}\frac{dx_2}{dx_1} + 2Z''\frac{dx_3}{dx_1}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Si l'on fait maintenant

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ D_2 = 0,\ D_{1,1} = 0,\ D_{0,2} = 0,$$

l'une d'entre ces équations exprimera la dite relation; on trouve en effet

$$Z^2_{1,1}\,Z'' + Z'^2_1 . Z_{0,2} + Z'^2_{0,1} . Z_2 - 4Z'' . Z_2 . Z_{0,2} - Z'_1 Z'_{0,1} Z_{1,1} = 0$$

comme condition nécessaire pour que le dit système soit légitime.

Observons en outre que X'_1, X'_2, X'_3 désignent, comme toujours, les dérivées totales

$$X_1 + Zz' + Z'z'' + Z_1 z'_1 + Z_{0,1}\,z'_{0,1}$$
$$X_2 + Zz'_1 + Z'z'_1 + Z_1 z_2 + Z_{0,1}\,z_{1,1}$$
$$X_3 + Zz_{0,1} + Z'z'_{0,1} + Z_1 z_{1,1} + Z_{0,1}\,z_{0,2}.$$

18. Notre méthode se généralise de la manière suivante.

Aux équations, entre lesquelles se fait l'élimination, ajoutons $n-1$ nouvelles équations à coefficients indéterminés; effectuons l'élimination et égalons à zéro les termes qui se prêtent à la détermination de $d\mu^{\alpha}_{\beta,\gamma}$: alors $\frac{n}{6}(n^3+6n+11) - 1$ variations dis-

paraîtront et nous aurons l'équation à 5 termes

$$A_1\delta x_1 + A_2\delta x_2 + A_3\delta x_3 + D_{1,n-1}dx_1\delta z_{1,n-1} + D_{0,n}\,dx,\ \delta z_{0,n} = 0,$$

dans laquelle il s'agira d'égaler à zéro les coefficients.

La solution sera comprise dans le système

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ D_{1,n-1} = 0,\ D_{0,n} = 0$$

conjointement avec les équations

$$dz^{\alpha}_{\beta,\gamma} = z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}\,dx_1 + z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}\,dx_2 + z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}dx_3.$$

Ainsi, par exemple, lorsque $n = 2$ les équations simultannées seront

$$A_1 + \lambda_1 dx_1\ D_{1,1} = 0,\ A_2 + \lambda_2 dx_1\ D_{1,1} = 0$$
$$A_3 + \lambda_3 dx_1\ D_{1,1} = 0,\ D_2 + \lambda_4\ D_{1,1} = 0$$

$$D_{0,2} + \lambda_5\ D_{1,1} = 0,\ dz^{\alpha}_{\beta,\gamma} = z^{\alpha+1}_{\beta,\gamma}dx_1 + z^{\alpha}_{\beta+1,\gamma}dx_2 + z^{\alpha}_{\beta,\gamma+1}\,dx_3.$$

Toutes ces quantités $\lambda_1 \ldots . \lambda_5$ ne sont liées que par la condition

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \lambda_3 dx_3 + \lambda_4 dz_2 + \lambda_5 dz_{0,2} = dz_{1,1} \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Pour prouver que la solution est comprise dans ce système multiplions la 2-me par $\frac{dx_2}{dx_1}$, la 3-me par $\frac{dx_3}{dx_1}$, la 4-me par dz_2, la 5-me par $dz_{0,2}$, et ajoutons; nous arriverons à l'équation $dF = 0$.

Enfin la condition (C) elle-même n'existera plus, attendu qu'elle sera remplie, si entre les cinq équations du système et (C) on élimine λ_1. On trouvera de cette manière

$$A_1 + D_{1,1}\,(dz_{1,1} - \lambda_5 dz_{0,2} - \lambda_4\,dz_2 - \lambda_2 dx_2 - \lambda_3 dx_3) = 0$$
$$A_2 + \lambda_2 dx_1 D_{1,1} = 0,\ A_3 + \lambda_3 dx_1 D_{1,1} = 0$$
$$D_2 + \lambda_4 D_{1,1} = 0,\ D_{0,2} + \lambda_5 D_{1,1} = 0,$$

les λ étant maintenant tout-à-fait arbitraires.

En appliquant le même procédé à l'équation $\frac{d^2z}{dx\,dy} = z$, on trouvera que la solution peut s'exprimer à l'aide du système suivant:

$$dy + \lambda dx = 0$$
$$dz'_1 + (\lambda z' - z_1)\,dx = 0$$
$$dz^s_r = z^s_{r+1}dx + z_r^{s+1}dy.$$

En effet, prenant la somme des deux premières équations après avoir multiplié par $-z'$ la 1-re, on trouve

$$dz'_1 - z_1 dx - z' dy = 0;$$

ce qui est
$$dz'_1 - dz = 0,$$

ou
$$z'_1 = z.$$

19. Cette méthode qui consiste à ajouter aux équations données un nombre convenable d'autres équations à coefficients indéterminés constitue la solution la plus générale de la question.

Supposant l'équation donnée d'ordre n et à m variables indépendantes, le nombre de ces équations qui constitueront le système requis, c'est-à-dire la solution cherchée, sera $2m-1$, sans compter les conditions exprimées par les équations

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Soient, par exemple, $2n$ fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n$ d'une seule variable indépendante t liées par le système d'équations

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dx_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dy_i},$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}(t, x_1, x_2, \ldots x_n, y_1 \ldots y_n).$$

La solution dépend, comme on sait, de la possibilité de trouver une seule solution complète d'une équation du 1-re ordre à $n+1$ variables indépendantes de la forme

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{F}\left(t, x_1 \ldots x_n, \frac{d\mathrm{V}}{dx_1}, \frac{d\mathrm{V}}{dx_2}, \ldots \frac{d\mathrm{V}}{dx_n}\right).$$

Cette dernière se réduira suivant notre méthode aux équations différentielles ordinaires de la manière suivante.

Nous la mettrons sous la forme

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n, \mathrm{V}, p_0, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0,$$

où $p_i = \frac{d\mathrm{V}}{dx_i}$; nous poserons ensuite, comme ci-dessus,

$$\mathrm{X}_i = \frac{df}{dx_i}, \quad \mathrm{X}'_i = \mathrm{X}_i + \mathrm{Z}p_i, \quad \mathrm{P}_i = \frac{df}{dp_i};$$

le système requis qui devra être intégré sera

$$\left\{ X'_i dx_0 + P_0 dp_i = 0, \quad P_{i+1} dx_0 - P_0 dx_{i+1} = 0 \right\} \ldots\ldots (a)$$

$$dV = p_0 dx + p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

On voit que x_0 remplace t et que i dans ce dernier système peut prendre les valeurs 0, 1, 2...n, sachant que $P_{n+1} = 0$, $x_{n+1} = 0$. Les deux formules (a) représentent donc $2(n+1) - 1$ équations.

CHAPITRE II.

MÉTHODE DU FACTEUR INTÉGRANT.

1. On peut déterminer la forme de l'intégrale générale de l'équation du 1-r ordre

$$N dy = M dx$$

de la manière suivante.

Désignons par μ le facteur qui rend cette équation intégrable: on sait qu'il est défini par l'équation

$$\mu \left(\frac{dN}{dx} + \frac{dM}{dy} \right) + N \frac{d\mu}{dx} + M \frac{d\mu}{dy} = 0,$$

et qu'à l'aide de la condition

$$d\mu - \frac{d\mu}{dx} dx - \frac{d\mu}{dy} dy = 0$$

on arrive au système

$$\frac{d\mu}{P\mu} = -\frac{dx}{N} = -\frac{dy}{M},$$

dans lequel P remplace $\frac{dN}{dx} + \frac{dM}{dy}$.

Si on multiplie $N \frac{d\mu}{\mu} = -P dx$ par un facteur indéterminé α, et l'équation $M \frac{d\mu}{\mu} = -P dy$ par un autre facteur β, et qu'on les ajoute ensuite, on trouvera

$$(N\alpha + M\beta) \frac{d\mu}{\mu} = -P(\alpha dx + \beta dy).$$

D'où $$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{P(\alpha dx+\beta dy)}{N\alpha+M\beta}.$$

Déterminons α et β de manière à vérifier les deux équations

$$\left\{\frac{d}{dx}[N\alpha+M\beta] = a\alpha P, \frac{d}{dy}[N\alpha+M\beta] = a\beta P\right\}, \ldots . \quad (A)$$

et soient $\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & a_1,\\ \alpha_2, & \beta_2, & a_2\end{matrix}\right\}$ deux systèmes des

valeurs particulières de α, β, et a respectivement propres à vérifier ces conditions, sachant d'ailleurs que a est une constante indéterminée: les deux solutions particulières de (A) fourniront deux valeurs du facteur, et nous aurons

$$c_1\mu = \frac{1}{(N\alpha_1+M\beta)^{a_1}}, \quad c_2\mu = \frac{1}{(N\alpha_2+M\beta_2)^{\frac{1}{a_2}}}.$$

Par suite, C désignant la constante arbitraire égale au rapport $\frac{c_2}{c_1}$, l'intégrale générale sera

$$C = \frac{(N\alpha_1+M\beta_1)^{\frac{1}{a_1}}}{(N\alpha_2+M\beta_2)^{\frac{1}{a_2}}}.$$

A l'aide de cette formule on peut trouver toutes les équations que l'état présent de l'analyse permet d'intégrer.

2. Proposons nous en premier lieu de résoudre le problème suivant.

Quelles doivent être les valeurs des fonctions N et M en supposant α et β des constantes indéterminées?

Je suivrai la notation du chapitre précédent en vertu de laquelle on a

$$N_r^s = \frac{d^{r+s}N}{dx^r dy^s}, \quad M_r^s = \frac{d^{r+s}M}{dx^r dy^s}.$$

Cela posé, j'écrirai les équations du système (A) de la manière suivante:

$$\alpha(1-a)N_1 + \beta M_1 - a\alpha M' = 0$$
$$\alpha N' - a\beta N_1 + \beta(1-a)M' = 0.$$

Après quoi j'éliminerai l'une des deux fonctions, soit M, entre les dérivées

$$\alpha(1-a)N'_1+\beta M'_1-a\alpha M''=0$$
$$\alpha N'_1-a\beta N_2+\beta(1-a)M'_1=0$$
$$\alpha N''-a\beta N'_1+\beta(1-a)M''=0:$$

j'aurai

$$\alpha^2N''-2\alpha\beta N'_1+\beta^2N_2=0\,.$$

Cette équation équivaut, d'après le chapitre précédent, aux trois équations simultanées suivantes:

$$\beta^2dy+2\alpha\beta dydx+\alpha dx^2=0$$
$$\beta^2dN_1dy+\alpha^2dN'dx=0$$
$$dN-N_1dx-N'dy=0\,.$$

La première donne

$$\beta y+ax=c_1$$

et transforme la suivante en celle-ci

$$\alpha N'-\beta N_1=c_2\,.$$

Enfin la dernière fournit d'abord les deux relations

$$\frac{dN}{c_2}=-\frac{dx}{\beta}=\frac{dy}{\alpha},$$

dont l'une, $-\frac{dx}{\beta}=\frac{dy}{\alpha}$, fait retourner à l'intégrale $\alpha x+\beta y=c_1$, et l'autre donne la valeur de N, savoir:

$$N=c_3-\frac{c_2}{\beta}x\,.$$

Faisant $c_3=f(\alpha x+\beta y)$, $c_2=\varphi(\alpha x+\beta y)$, c'est—à—dire $c_3=f(c_1)$, $c_2=\varphi(c_1)$, je trouve la valeur de N,

$$N=f(\alpha x+\beta y)-\frac{x}{\beta}\varphi(\alpha x+\beta y),$$

f et φ désignant les deux fonctions arbitraires de la quantité $\alpha x+\beta y$.

Éliminons maintenant N de l'équation

$$\alpha N'-a\beta N_1+\beta(1-a)M'=0,$$

qui est la seconde du système (A); nous trouverons

$$\alpha N' = \alpha\beta f'(\alpha x+\beta y) - x\varphi'(\alpha x+\beta y).\ \alpha\,,$$

$$-a\beta N_1 = -a\alpha\beta f'(\alpha x+\beta y)+a\varphi(\alpha x+\beta y)+a\alpha x\varphi'(\alpha x+\beta y)\,,$$

$$\alpha\beta(1-a)f'(\alpha x+\beta y)+\alpha x(a-1)\varphi'(\alpha x+\beta y)=$$

$$\beta(a-1)M'-a\varphi(\alpha x+\beta y).$$

Intégrant par rapport à y, il vient

$$\beta(a-1)M=\alpha(1-a)f(\alpha x+\beta y)+\frac{\alpha}{\beta}(a-1)x\varphi(\alpha x+\beta y)+$$

$$a\int\varphi(\alpha x+\beta y).dy+\psi(x)\,,$$

où $\psi(x)$ désigne une fonction arbitraire de x que je vais déterminer.

Remplaçons $\varphi(\alpha x+\beta y)$ par la dérivée $\Phi'(\alpha x+\beta y)$ d'une nouvelle fonction arbitraire $\Phi(\alpha x+\beta y)$; les valeurs de N, M se transformeront en celles-ci:

$$N=f(\alpha x+\beta y)-\frac{x}{\beta}\Phi'(\alpha x+\beta y)\,,$$

$$M=-\frac{\alpha}{\beta}f(\alpha x+\beta y)+\frac{\alpha}{\beta^2}x\Phi'(\alpha x+\beta y)+$$

$$\frac{a}{\beta^2(a-1)}\cdot\Phi(\alpha x+\beta y)+\frac{\psi(x)}{\beta(a-1)}.$$

Substituant ces valeurs de N, M dans l'équation

$$\alpha(1-a)\ N_1+\beta M_1-a\alpha M'=0\,,$$

qui est la première du système (A), nous aurons successivement

$$\alpha(1-a)N_1=\alpha^2(1-a)f'(\alpha x+\beta y)-(1-a)\frac{\alpha^2x}{\beta}\Phi''(\alpha x+\beta y)-$$

$$-(1-a)\frac{\alpha}{\beta}\Phi'(\alpha x+\beta y),$$

$$\beta M_1=-\alpha^2f'(\alpha x+\beta y)+\frac{\alpha}{\beta}\Phi'(\alpha x+\beta y)+\frac{\alpha^2x}{\beta}\Phi''(\alpha x+\beta y)+$$

$$+\frac{a.\alpha}{\beta(a-1)}\Phi'(\alpha x+\beta y)+\frac{\psi'(x)}{\beta(a-1)},$$

$$-a\alpha M'=a\alpha^2f'(\alpha x+\beta y)-\frac{a\alpha^2x}{\beta}\Phi''(\alpha x+\beta y)-\frac{a^2\alpha}{\beta(a-1)}\Phi'(\alpha x+\beta y);$$

et la somme des seconds membres devant être nulle, on a $\psi(x)=$ constante.

Par suite on aura pour la solution requise les deux valeurs suivantes:

$$N = f(\alpha x+\beta y) - \frac{x}{\beta}\Phi'(\alpha x+\beta y)$$

$$M = -\frac{\alpha}{\beta}f(\alpha x+\beta y)+\frac{\alpha}{\beta^2}x\Phi'(\alpha x+\beta y)+\frac{a}{(a-1)\beta^2}\cdot\Phi(\alpha x+\beta y)+c.$$

Ces deux conditions remplies, l'intégration de l'équation $Ndy=Mdx$ pourra s'achever toujours, attendu que la détermination des constantes ne dépendra que des opérations algébriques.

3. Considérons, par exemple, l'équation

$$(ky+lx+m)dy = (k_1y+l_1x+m_1)dx,$$

k, l, m, k_1, l_1, m_1, étant des constantes quelconques.

On s'aperçoit de suite que l'une des deux constantes, α ou β, peut être remplacée par l'unité. Soit donc $\alpha = 1$.

Actuellement le système (A) est

$$\frac{d}{dx}[ky+lx+m+\beta(k_1y+l_1x+m_1)] = a(l+k_1)$$

$$\frac{d}{dy}[ky+lx+m+\beta(k_1y+l_1x+m_1)] = a\beta(l+k_1).$$

Donc, en exécutant les opérations indiquées,

$$l+\beta l_1 = a\,(l+k_1)$$

$$k+\beta k_1 = a\beta(l+k_1).$$

La première donne

$$a = \frac{l+\beta l_1}{l+k_1},$$

et cette valeur de a étant substituée dans la dernière établira la relation

$$k+\beta k_1 = \beta(l+\beta l_1).$$

Désignons par β_1, β_2 les deux racines de cette équation, et faisons pour abréger

$$a_1 = \frac{l+\beta_1 l_1}{l+k_1},\quad a_2 = \frac{l+\beta_2 l_1}{l+k_1}:$$

nous aurons

$$C = \frac{[(k+\beta_1k_1)y+(l+\beta_1l_1)x+m_1+\beta_1m_1]^{\frac{1}{a_1}}}{[(k+\beta_2k_1)y+(l+\beta_2l_1)x+m_2+\beta_2m_2]^{\frac{1}{a_2}}}.$$

Ce qui est l'intégrale générale cherchée.

4. On pourrait tout aussi bien trouver les valeurs des coefficients M, N en supposant α, β des fonctions d'une seule des deux variables, mais comme la solution finale ne dépendra plus des seules opérations algébriques, nous ne nous y arrêterons pas. Il existe d'ailleurs un autre moyen de développer la théorie du facteur, comme on va le voir dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Méthode des intégrales particulières appliquée à l'équation

$$N dy + M dx = 0,$$

dans laquelle N *et* M *sont des polynomes entiers en* y, *quelconques en* x.

5. Je commencerai par énoncer un beau théorème dû à F. Minding, professeur à l'université de Dorpat [à consulter le mémoire du professeur qui a pour titre: „Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung"].

Théorème. Soit W une fonction de x, y définie par l'équation

$$W = V + T_1 + T_2 + \ldots + T_q ,$$

dans laquelle V désigne un polynome entier en y, quelconque en x, et T_q est donné par la formule

$$T_q = \frac{D_{1,q}}{y - y_q} + \frac{D_{2,q}}{(y-y_q)^2} + \ldots + \frac{D_{p,q}}{(y-y_q)^p} + \varepsilon_q \log(y - y_q);$$

dans cette dernière $D_{p,q}$, y_q sont des fonctions de x, ε_q une constante, et les indices p, q, comme toujours, des entiers positifs 1, 2, 3.... *Si* e^{-W} *est le facteur intégrant de la proposée* donc

$$\frac{d}{dx}\left(N e^{-W}\right) = \frac{d}{dy}\left(M e^{-W}\right),$$

les différentes fonctions représentées par y_1, y_2.. y_q *seront autant des solutions particulières de* $Ndy+Mdx=0$. De façon que si l'on désigne par N_i, M_i les résultats de la substitution de y_i dans N, M respectivement, on aura identiquement

$$N_i dy_i + M_i dx = 0.$$

Je ne m'arrêterai pas à la démonstration de ce théorème attendu que, comme on verra plus tard, il se déduit comme corollaire d'une autre proposition aussi simple que générale. Je crois bien plus utile de faire quelques observations relativement à la portée et au sens du théorème.

6. Il est visible d'abord que la proposition est entièrement indéterminée; toutes les fonctions ainsi que les constantes qui entrent dans W sont autant de quantités indéterminées: dès lors il est difficile de reconnaître quel usage peut on en faire et quelle est la classe d'équations sur laquelle le théorème s'étend. On s'aperçoit, il est vrai, qu'en prenant

$$e^{W} = \text{Constante}$$

pour fonction primitive, il est possible d'en déduire, au moyen de différentiation et de réduction, une équation de la forme

$$Pdy+Qdx=0,$$

P et Q désignant des polynomes entiers en y, quelconques en x; mais on reconnaît aussi que la comparaison des coefficients P, Q avec ceux de la proposée fournira plus de conditions que de quantités arbitraires dont on puisse disposer; c'est-à-dire qu'on arrivera nécessairement à une relation entre les quantités données. Dès lors deux vérités s'établissent assez clairement. La première est que la quantité e^{W} ne constitue pas ce que l'on est convenu d'appeler la *forme générale* du facteur de $Ndy+Mdx=0$, N et M désignant comme précédemment deux fonctions entières en y, quelconques en x. La seconde, que l'indétermination ne disparaîtra du théorème en question que si l'on trouve la dite relation entre les quantités données.

On voit déjà combien il est difficile d'apprécier la force et la vraie signification du théorème, et on va voir que l'usage qu'en

a fait l'auteur n'est pas propre à fournir les éclaircissements nécessaires et suffiisants. Pour. le faire sentir, je prendrai pour exemple

$$N = (2y^3 + y^2 + 2xy + 2x)x,$$

$$M = y^4 + y^3 + 2y^2x + 4yx + 2x,$$

$$N dy + M dx = 0.$$

On remarque que cette équation a $y = -1$ pour intégrale particulière. Par suite, en se guidant du théorème on devra essayer s'il n'est pas possible de satisfaire à la condition

$$\frac{d}{dx}(e^{-W} N) = \frac{d}{dy}(e^{-W} M)$$

indépendamment de y en posant

$$W = X + \varepsilon \log(y+1),$$

X étant fonction de la seule variable x, et ε une constante indéterminée.

Développant l'équation de condition, et égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de y, comme cela se fait selon la méthode des coefficients indéterminés, on trouve les trois conditions

$$2 - \varepsilon + 2x\frac{dX}{dx} = 0, \quad 2 + x\frac{dX}{dx} = 0, \quad -\varepsilon + x\frac{dX}{dx} = 0,$$

qui s'accordent à donner $X = -2\log x$, $\varepsilon = -2$, donc

$$e^{-W} = x^2(y+1)^2.$$

On reconnaît d'après cet exemple que le théorème en question admet aussi l'énoncé suivant:

Soient $y_1, y_2 \ldots y_q$ un certain nombre q d'intégrales particulières de $N dy + M dx = 0$, N et M étant des fonctions entières en y, quelconques en x: on pourra dans certains cas trouver la valeur du facteur intégrant à l'aide de la formule

$$\frac{d}{dx}(N e^{-W}) = \frac{d}{dy}(M e^{-W}),$$

en faisant usage de la méthode connue dite *des coefficients indé-*

terminés, sachant d'ailleurs que W conserve la signification qu'on lui attribue dans le premier énoncé.

Mais ici surgissent encore des questions qui prouvent que le théorème est indéterminé. En effet, qu'est ce qui caractérise ces *certains* cas, c'est-à-dire les équations que l'on peut intégrer en se guidant du théorème? et quel est le nombre nécessaire et suffisant des solutions particulières pour connaître la solution complète de l'équation donnée?

7. Ce n'est qu'à la suite d'une étude assidue du mémoire cité que je suis parvenu à sentir la force de la découverte et à saisir la vraie portée du théorème.

Jusqu'à l'apparition du dit mémoire on n'avait appliqué la méthode des intégrales particulières qu'aux équations linéaires pour définir la forme de l'intégrale générale: le mémoire de M. Minding nous apprend que la dite méthode est générale en ce sens qu'elle s'applique aux équations de tous les ordres nonlinéaires. On trouve en effet dans le dit mémoire un grand nombre d'équations que l'on n'a pu intégrer par d'autres méthodes et que l'on peut intégrer sans tâtonnement par la méthode des intégrales particulières. Ainsi, en supposant N et M des fonctions entières par rapport aux deux variables, y et x, on posera $y=\alpha x+\beta$, α et β étant deux constantes indéterminées; la substitution de cette valeur fera découvrir soit le facteur intégrant, soit de nouvelles conditions d'intégrabilité. Après avoir préparé la proposée en sorte que ces conditions fussent satisfaites, on trouvera toujours l'integrale générale qui sera de la forme

$$(y-y_1)^{m_1}(y-y_2)^{m_2}\ldots(y-y_r)^{m_r}=C,$$

C étant, comme toujours, la constante d'intégration, $m_1\ldots m_r$ des constantes et $y_i=\alpha_i x+\beta_i$.

Enfin la méthode que je vais exposer dans ce chapitre n'est qu'un développement et une extension de la belle théorie conçue par le génie de M. Minding, et c'est comme telle que je prie le lecteur de l'accepter.

8. *Proposition.—Les coefficients* M *et* N *de l'équation* $Ndy+Mdx=0$ *étant deux polynomes entiers en y des degrés p et q respectivement, on peut la transformer en sorte que le degré de* M *n'excèdera celui de* N *que de deux unités.*

En effet, soient

$$M = Ay^p + A_1 y^{p-1} + \ldots + A_p$$

$$N = By^q + B_1 y^{q-1} + \ldots + B_q,$$

$A, A_1 \ldots A_p$, $B \ldots B_q$ étant des fonctions quelconques de la variable indépendante.

Si l'on avait $A_p = 0$, $B_q = 0$, il faudrait changer y en $y + f(x)$, $f(x)$ désignant une fonction arbitraire; cette substitution fera reparaître les dits coefficients. Il est donc permis de supposer A_p et B_q différents de zéro.

Cela posé, remplaçons y par $\frac{1}{u}$, u étant une nouvelle variable; nous aurons

$$-(B_q u^q + B_{q-1} u^{q-1} + \ldots + B_1 u + B)\frac{du}{u^{q+2}}$$

$$+(A_p u^p + A_{p-1} u^{p-1} + \ldots + A_1 u + A)\frac{dx}{u^p},$$

et, suivant que q sera $> p+2$ ou $< p+2$, en chassant le dénominateur, on trouvera ou

$$-(Bqu^q + B_{q-1} u^{q-1} + \ldots + B_1 u + B)du$$

$$+(A_p u^{q+2} + A_{p-1} u^{q+1} + \ldots + Au^{q-p+2})dx = 0$$

ou bien

$$-(Bqu^{p-2} + B_{q-1} u^{p-3} + \ldots + Bu^{p-q-2})du$$

$$+(A_p u^p + A_{p-1} u^{p-1} + \ldots + A)dx = 0.$$

La proposition se trouve donc établie.

Pour exemple je prendrai

$$N = y, \quad M = Ay^2 + A_1 y + A_2.$$

D'après ce qui précède on changera d'abord y eu $y + \alpha$, puis, dans le résultat

$$(y+\alpha)dy + [Ay^2 + (2\alpha A + \alpha' + A_1)y + A\alpha^2 + A_1\alpha + A_2 + \alpha\alpha']dx = 0,$$

y en $\frac{1}{u}$, ce qui donnera successivement

$$-(1+\alpha y)\frac{dy}{y^3} + \left[A\alpha^2 + A_1\alpha + A_2 + \alpha\alpha' + (2\alpha A + \alpha' + A_1)\frac{1}{y} + \frac{A}{y^2}\right]dx = 0,$$

$$-(1+\alpha y)dy+[(A\alpha^2+A_1\alpha+A_2+\alpha\alpha')y^3$$
$$+(2A\alpha+\alpha'+A_1)y^2+Ay]dx=0.$$

Cela s'entend que cette transformation n'est pas absolument nécessaire; elle a pour but unique d'abréger et de généraliser l'analyse.

9. En vertu de la proposition que je viens d'établir l'équation du 1-re ordre à coefficients entiers relativement à la variable y sera celle-ci:

$$(y^i+B_1y^{i-1}+\ldots+B_i)dy+(Ay^{i+2}+A_1y^{i+1}+\ldots+A_{i+2})dx=0\ldots(D)$$

On a posé $B=1$ parce que cela ne changera en rien notre raisonnement.

Faisons, pour abréger les formules,

$$(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_r)=P_r$$
$$(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots(y_1-y_r)=D_{1,r}$$
$$(y_2-y_1)(y_2-y_3)\ldots(y_2-y_r)=D_{2,r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y_r-y_1)(y_r-y_2)\ldots(y_r-y_{r-1})=D_{r,r-1};$$

de plus l'équation donnée sera (D), et nous la représenterons par

$$Ny'+M=0,$$

et quand y sera remplacé par y_r, sachant que y_r est le terme général des intégrales particulières, nous écrirons

$$N_ry'_r+M_r=0.$$

Je préviens que *l'intégrale particulière* y_r est toute valeur de la fonction y propre à réduire l'équation donnée à l'identité

$$0=0.$$

De façon que $y=x$ est l'intégrale particulière de

$$y'+2y^2-x^{-2}=0,$$

attendu que cette valeur de y, étant substituée dans l'équation, fournira

$$-x^{-2}+2x^{-2}-x^{-2}=0$$
$$0=0.$$

10. Cela posé, divisions (D) successivement par P_1, P_2, ... P_{i+3}; nous aurons, en ayant égard aux équations $N_1 y'_1 + M_1 = 0$, $N_2 y'_2 + M_2 = 0$, etc, le système suivant:

$$[y^{i-1} + f_{i-2}(x, y, y_1)]y' + Ay^{i+1} + F_i(x, y, y_1) + N_1 \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} = 0$$

$$[y^{i-2} + f_{i-3}(x, y, y_1, y_2)]y' + Ay^i + F_{i-1}(x, y, y_1, y_2) +$$

$$+ \frac{N_1}{D_{1,2}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{N_2}{D_{2,1}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{y-y_2} = 0$$

$$[y^{i-3} + f_{i-4}(x, y, y_1, y_2, y_3)]y' + Ay^{i-1} + F_{i-2}(x, y\, y_1\, y_2\, y_3) +$$

$$+ \frac{N_1}{D_{1,3}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{N_2}{D_{2,3}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{(y-y_2)} + \frac{N_3}{D_{3,2}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_3)}{y-y_3} = 0$$

. . . . . .

$$y' + Ay^2 + (As_{1,i} + A_1)y + As^2_{1,i} + A_1 s_{1,i} + A_2 - As_{2,i}$$

$$+ \frac{N_1}{D_{1,i}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{N_2}{D_{2,i}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{y-y_2} + \ldots + \frac{N_i}{D_{i,i-1}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_i)}{y-y_i} = 0,$$

$$Ay + (As_{1,i+1} + A_1) + \frac{N_1}{D_{1,i+1}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_i)}{y-y_1} + \ldots + \frac{N_{i+1}}{D_{i+1,i}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_{i+1})}{y-y_{i+1}} = 0,$$

$$A + \frac{N_1}{D_{1,i+2}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} + \ldots + \frac{N_{i+2}}{D_{i+2,i+1}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_{i+2})}{y-y_{i+2}} = 0,$$

$$\frac{N_1}{D_{1,i+3}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1} + \ldots + \frac{N_{i+3}}{D_{i+3,i+2}} \frac{\frac{d}{dx}(y-y_{i+3})}{y-y_{i+3}} = 0.$$

Comme il ne s'agit pour le moment que de la forme de l'intégrale, nous avons adopté les abréviations

$$f_{i-2}(x, y\ y_1) = (y_1 + B_1)y^{i-2} + (y^2 + B_1 y_1 + B_2)y^{i-3} + \ldots$$

$$\ldots + y_1^{i-1} + \ldots + B_{i-1}$$

l'indice de f servant ainsi à rappeler le degré du polynome entier en y que cette lettre représente; de même

$$F_i(x,\ y\ y_1) = (Ay_1 + A_1)y^i + \ldots + Ay_1^{i+1} + A_{i+1}$$

et ainsi de suite.

On voit d'ailleurs qu'actuellement $r = i + 3$, c'est-à-dire que la dernière division de la proposée a été faite par

$$P_{i+3} = (y - y)(y - y_2)\ldots(y - y_{i+3}),$$

et que

$$s_{1,i} = y_1 + y_2 + \ldots + y_i$$

$$s_{2,i} = y_1y_2 + y_1y_3 + \ldots + y_2y_3 + y_2y_4 + \ldots + y_{i-1}\,y_i, \text{ etc.}$$

Les formes des solutions que l'on peut tirer de chacune de ces $i+3$ équations sont certainement incalculables, mais si l'on se contente des plus simples de ces formes, il sera facile de reconnaître qu'elles sont comprises dans la formule suivante

$$e^{-V-R}(y - y_1)^{n_1}(y - y_2)^{n_2}\ldots(y - y_r)^{n_r} = C,$$

V désignant un polynome entier en y, et R la partie rationelle non-entière

$$\frac{Q_{1,q}}{y - y_1} + \frac{Q_{2,q}}{(y - y_1)^2} + \ldots + \frac{Q_{r,q}}{(y - y_q)^r},$$

les Q étant des fonctions de x.

Il est visible que les $y_1 \ldots y_r$ qui entrent dans la valeur de W du facteur e^{-W} (n° 5) sont en effet autant d'intégrales particulières de $Ny' + M = 0$, et le théorème se trouve démontré de soi-même. Mais, en outre, l'inspection de nos $i+3$ équations met en évidence plusieurs autres propositions importantes. La plus évidente consiste en ceci qu'on n'a pas besoin de connaître d'avance les intégrales $y_1 \ldots\ldots y_r$; on les trouvera sans intégrations, si toutefois la partie lagarithmique existe et les différentes fonctions représentées par $Q_{r,q}$ ne sont pas nulles. Pour le faire voir, multiplions nos $i+3$ équations par des facteurs indéterminés m_1, m_2,... m_{i+3} respectivement, ajoutons les ensuite et représentons le résultat sous la forme suivante:

$$f_{i-1}(x, y, y_r, m_r)y' + F_{i+1}(y, x, y_r, m_r) + N_1 \sum_1^r \frac{m_r}{D_{1,r}} \cdot \frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1}$$

$$+ N_2 \sum_2^r \frac{m_r}{D_{2,r}} \cdot \frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{y-y_2} + \ldots + N_{r-1} \sum_{r-1}^r \frac{m_r}{D_{r-1,r}} \cdot \frac{\frac{d}{dx}(y-y_{r-1})}{y-y_{r-1}}$$

$$+ \frac{N_r}{D_{r,r-1}} m_r \frac{\frac{d}{dx}(y-y_r)}{y-y_r} = 0.$$

Multipliant cette dernière équation par un facteur indéterminé μ, on voit qu'il est possible de disposer de ces facteurs $m_1 \ldots m_r$, μ de manière à verifier les conditions

$$\frac{N_r \mu m_r}{D_{r,r-1}} = \text{constante } n_r,$$

$$N_{r-1} \mu \left(\frac{m_{r-1}}{D_{r-1,r-2}} + \frac{m_r}{D_{r-1,r}} \right) = n_{r-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_1 \mu \sum_1^r \frac{m_r}{D_{1,r}} = n_1,$$

sachant que $D_{1,1} = 1$.

Si donc ces valeurs des facteurs sont telles que l'on ait en même temps

$$\mu [f_{i-1}(x, y, y_r, m_r)y' + F_{i+1}(x, y, y_r, m_r)] = \textit{dérivée exacte},$$

il viendra

$$e^{V+R} (y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2} \ldots (y-y_r)^{n_r} = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

V étant un polynome entier en y, quelconque en x, et R une fonction rationnelle par rapport à y et quelconque en x; enfin C est, comme toujours, la constante d'intégration.

Les indéterminées μ, $m_1 \ldots m_2$ ne suffiront pas à elles seules de vérifier les dites conditions, il en résultera finalement une relation entre les $y_1, y_2, \ldots y_r$, laquelle, conjointement aves les r équations comprises en $N_r y'_r + M_r = 0$, servira à déterminer toutes ces intégrales sans intégrations. Il est visible aussi que tou-

tes ces opérations aboutiront à une équation de condition qui ne contiendra que les quantités données B_1, B_2.... A_1, A_2..A_{i+2}.

Mais la forme (I) n'est évidemment qu'un cas particulier d'autres combinaisons que l'on peut tirer des $i+3$ équations trouvées plus haut. En effet, diviser l'équation donnée par P_1 P_2.... P_{i+3} successivemeut, prendre ensuite la somme de ces équations multipliées par des indéterminées m_1, m_2...m_{i+3}, et multiplier enfin le résultat par une quantité indéterminée μ propre à rendre l'équation finale intégrable, cela revient à multiplier (D) une seule fois par le facteur

$$\mu\left\{\frac{m_1}{y-y_1}+\frac{m_2}{(y-y_1)(y-y_2)}+\ldots+\frac{m_{i+3}}{P_{i+3}}\right\}.$$

Et si l'on pose

$$\mu = \textit{fonction rationnelle en } y,$$

$$\text{et } m_r = e^{-W_r},$$

sachant que W_r est de la forme $V+T_1+T_2\ldots$ donnée par M. Minding, on trouvera les formes générales cherchées.

11. Appliquons notre méthode succesivement aux équations suivantes:

$$y'+Ay^2+A_1y+A_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(y+B_1)y'+Ay^2+A_1y+A_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(y+B_1)y'+Ay^3+A_1y^2+A_2y+A_3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Divisant (1) par $y-y_1$, il vient

$$\frac{y'}{y-y_1}+Ay+Ay_1+A_1+\frac{Ay_1^{\,2}+A_1y_1+A_2}{y-y_1}=0.$$

Mais $Ay_1^{\,2}+A_1y_1+A_2=-y'_1$, donc

$$\frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1}+Ay+Ay_1+A_1=0.$$

Divisant la même équation (1) par

$$(y-y_1)(y-y_2),$$

nous aurons

$$A+\frac{1}{y_1-y_2}\cdot\frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1}+\frac{1}{y_2-y_1}\cdot\frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{y-y_2}=0.$$

Enfin la division par

$$(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$$

fournira

$$\frac{1}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}\cdot\frac{\frac{d}{dx}(y-y_1)}{y-y_1}+\frac{1}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}\cdot\frac{\frac{d}{dx}(y-y_2)}{y-y_2}+$$

$$+\frac{1}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}\cdot\frac{\frac{d}{dx}(y-y_3)}{y-y_3}=0.$$

Aucune de ces trois équations ne se prête à la découverte d'une nouvelle condition d'intégrabilité, ce qui vient de ce que la proposée est intégrable si l'on donne la valeur d'une seule des intégrales particulières. Le facteur de la 1-re est évidemment $\frac{e^{-\int(2Ay_1+A_1)dx}}{y-y_1}$, et celui de la deuxième y_1-y_2. Quant à la troisième, on ne peut satisfaire aux conditions

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\text{constante},$$

$$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}=\text{const.},$$

qu'en faisant $y_2=y_3$.

Pour découvrir les conditions cherchées il faut diviser la proposée par

$$(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4),$$

puis par

$$(y-y_1).....(y-y_4)(y-y_5),$$

etc, après quoi vérifier les conditions

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)}=\text{const.},$$

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)}=\text{const.},$$

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)}{(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_4-y_3)}=\text{const.},$$

conjointement avec les 4 équations comprises dans la formule

$$N_r y'_r + M_r = 0,$$
$$r = 1, 2, 3, 4.$$

On en tirera les valeurs des $y_1 \ldots y_4$ sans intégration et on aboutira finalement à la relation cherchée entre les coefficients A, A_1, A_2. Nous ne nous y arrêtons pas, attendu que cette équation sera traitée en détails dans les chapitres suivants.

12. Citons d'abord quelques cas particuliers dans lesquels l'intégration de (2) s'achève.

Divisant $M = Ay^2 + A_1 y + A_2$ par $N = y + B_1$, et posant pour abréger

$$A_2 - A_1 B_1 + A B_1^2 = R$$
$$A_1 - 2AB_1 - B'_1 = Q,$$

sachant que $B'_1 = \frac{dB_1}{dx}$, on trouve

$$y' + Ay - AB_1 + A_1 + \frac{R}{y + B_1} = 0.$$

1° La condition $R = 0$ est évidente et signifit simplement ceci que $y = -B_1$ est une intégrale particulière.

2° Si l'on a $Q = 0$, la substitution $y + B_1 = u$ fournira

$$uu' + Au^2 + R = 0,$$

d'où

$$u = e^{-\int A dx} \left[C - \int R e^{+2\int A dx} dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3° Si l'on a en même temps

$$Q = a, \quad R' + AR = b,$$

a et b étant deux constantes, la substitution

$$\frac{R}{y + B_1} = z$$

donnera

$$Rz' = z^3 + az^2 + bz,$$

$$\frac{dz}{z^3 + az^2 + bz} = \frac{dx}{R}.$$

Tel est par exemple le cas où l'on a $N = a_1 y + b_1 x + c_1$, $M = a_2 y + b_2 x + c_2$, a_1, b_1, etc étant des constantes.

13. On a pu déjà remarquer que c'est principalement la *division* qni met en évidence les solutions et les conditions d'intégrabilité, donc l'analogie entre les équations algébriques ordinaires et les équations différentielles existe non seulement quand ces dernières sont linéaires, mais aussi à l'égard d'autres classes d'équations; c'est ce qui ressortira encore mieux dans la suite.

La division de l'équation

$$(y+B_1)y' + Ay^2 + A_1 y + A_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

par $y - y_1$ donne

$$y' + Ay + Ay_1 + A_1 + \frac{N_1 y' + M_1}{y - y_1} = 0,$$

puis, en vertu de l'équation

$$N_1 y'_1 + M_1 = 0,$$

$$y' + Ay + Ay_1 + A_1 + N_1 \frac{d}{dx} \log(y - y_1) = 0.$$

En lui donnant la forme

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int A dx} + \int e^{\int A dx} (Ay_1 + A_1) dx \right] + N_1 e^{\int A dx} \cdot \frac{d}{dx} \log(y - y_1) = 0,$$

on remarque aisément les cas d'intégrabilité suivants:

1° Si

$$N_1 e^{\int A dx} = n,$$

n étant une constante,

on aura

$$(y - y_1)^n \cdot e^{y e^{\int A dx} + \int e^{\int A dx} (Ay_1 + A_1) dx} = C$$

pour intégrale générale.

Et la valeur de y_1, tirée de la condition $N_1 e^{\int A dx} = n$, étant substituée dans

$$N_1 y'_1 + M_1 = 0,$$

fournira la relation entre les quantités données

$$n \cdot Q + R e^{\int A dx} = 0.$$

Q et R représentent comme toujours les deux polynomes

$$A_1 - 2AB_1 - B'_1$$
$$A_2 - B_1A_1 + B_1{}^2A$$

respectivement.

2° Posant pour abréger

$$ye^{\int A dx} + \int e^{\int A dx} (Ay_1 + A_1) dx = W,$$

et multipliant e suite l'équation

$$\frac{dW}{dx} + N_1 e^{\int A dx} \cdot \frac{d}{dx} \log(y - y_1) = 0$$

par une fonction arbitraire de W, soit $f(W)$, on s'aperçoit que si l'on vérifie la condition

$$N_1 e^{\int A dx} f(W) = F(y - y_1),$$

F étant une nouvelle fonction arbitraire, l'intégrale générale sera

$$\int f(W) dW + \int F(y - y_1) d \log (y - y_1) = C.$$

Considérons maintenant les deux équations

$$y' + Ay + Ay_1 + A_1 + N_1 \frac{d}{dx} \log (y - y_1) = 0$$

$$A + \frac{N_1}{y_1 - y_2} \frac{d}{dx} \log (y - y_1) + \frac{N_2}{y_2 - y_1} \frac{d}{dx} \log (y - y_2) = 0,$$

dont la dernière est le résultat de la division de la proposée par le produit

$$(y - y_1)(y - y_2).$$

On voit aisément que si l'on a

$$N_2 = nN_1,$$

la solution sera

$$e^{\int A(y_1 - y_2) dx} \cdot \frac{(y - y_1)}{(y - y_2)^n} = C.$$

Pour abréger les calculs prenons N pour la fonction inconnue et, par conséquent,

$$NN' + AN^2 + QN + R = 0$$

pour l'équation donnée: nous aurons donc, à substituer la valeur de $N_2 = nN_1$ dans

$$N_2N_2' + AN^2{}_2 + QN_2 + R = 0,$$

ce qui donnera

$$n^2N_1N'_1 + n^2AN^2{}_1 + nQN_1 + R = 0,$$

puis à comparer cette dernière avec celle-ci

$$N_1N'_1 + AN^2{}_1 + QN_1 + R = 0.$$

Éliminant la dérivée de N_1, on trouve

$$QN_1n + R(n+1) = 0.$$

D'où

$$N_1 = -\frac{(n+1)}{n}\frac{R}{Q}.$$

Et puisque cette valeur de N_1 doit satisfaire à l'équation

$$N_1N'_1 + AN^2{}_1 + QN_1 + R = 0,$$

on trouve la relation

$$R = Qe^{-\int A dx}\left[c + \frac{n}{(n+1)}2\int Qe^{\int A dx}dx\right]$$

c étant une constante arbitraire.

Revenons maintenant à nos deux équations

$$y' + Ay + Ay_1 + A_1 + N_1\frac{d}{dx}\log(y - y_1 = 0$$

$$A + \frac{N_1}{y_1 - y_2}\cdot\frac{d}{dx}\log(y - y_1) + \frac{N_2}{y_2 - y_1}\cdot\frac{d}{dx}\log(y - y_2) = 0.$$

Ajoutons la dernière multipliée par une indéterminée α à la première; nous pourrons écrire le résultat sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int A dx} + \int e^{\int A dx}(Ay_1 + A_1 + A\alpha)dx\right]$$

$$+ N_1\left(1 + \frac{\alpha}{y_1 - y_2}\right)e^{\int A dx}\frac{d}{dx}\log(y - y_1) + \frac{N_2\alpha}{y_2 - y_1}e^{\int A dx}\frac{d}{dx}\log(y - y_2) = 0.$$

D'où l'on conclut que l'intégrale générale sera

$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}\cdot e^{\int A dx}+\int e^{\int A dx}(Ay_1+A_1+A\alpha)dx = C$$

si l'on a

$$N_1\left(1+\frac{\alpha}{y_1-y_2}\right)e^{\int A dx}=n_1,\quad \frac{N_2\alpha e^{\int A dx}}{y_2-y_1}=n_2.$$

On en tire l'équation de condition

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}=e^{\int A dx}.$$

En général, pour que (2) ait

$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}\ldots(y-y_r)^{n_r}\cdot e^{\int A dx}y+\int e^{\int A dx}\left(A_1+\frac{A\Sigma y_r\alpha_r}{\Sigma\alpha_r}\right)dx = C$$

pour intégrale il faut que les solutions particulières $y_1, y_2 \ldots y_r$ soient liées entre elles par l'équation

$$\frac{n_1}{N_2}+\frac{n_2}{N_2}+\ldots+\frac{n_r}{N_r}=e^{\int A dx}.$$

Le signe $\Sigma y_r\alpha_r$ remplace la somme

$$y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\ldots+y_r\alpha_r$$

et $\Sigma\alpha_r=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r$,

les α ayant des valeurs déterminées.

On trouvera aussi que la solution sera de la forme

$$e^{\int X dx}(y-y_1)^{n_2}(y-y_2)^{n_2}\ldots(y-y_r)^{n_r}=C,$$

X étant une fonction de x, si l'on a

$$n_1N_2N_3\ldots N_r+n_2N_1N_3N_4\ldots N_r+\ldots+(n_r-1)N_1N_2\ldots N_{r-1}=0.$$

14. Enfin, quant à l'équation (3)

$$(y+B_1)y'+Ay^3+A_1y^2+A_2y+A_3=0,$$

elle se ramène au cas précédent si l'on donne la valeur d'une seule des intégrales particulières, soit $y = y_1$.

En effet, soit par le procédé de la substitution, en faisant $y = u + y_1$, soit en retranchant

$$N_1 y'_1 + M_1 = 0$$

$$\text{de } Ny' + M = 0,$$

on arrivera à l'équation de la forme

$$(u + N_1)u' + Au^3 + A_{1,1}u^2 + A_{2,1}u = 0$$

sans dernier terme, dans laquelle on fera $u = \frac{1}{\nu}$; il viendra alors

$$-(1 + N_1\nu)\nu' + A + A_{1,1}\nu + A_{2,1}\nu^2 = 0.$$

Ce qui est de la forme requise.

15. Après avoir ainsi confirmé et généralisé le théorème de Minding, je vais m'occuper des relations qui existent entre les intégrales particulières et les coefficients N, M de l'équation (D).

Supposons $A = 0$ et écrivons cette équation sous la forme suivante:

$$(y - \beta_1)(y - \beta_2) \ldots (y - \beta_i)y' + f(x, y) = 0.$$

Cela revient à poser

$$N = y^i + B_1 y^{i-1} + \ldots + B_i = (y - \beta_1)(y - \beta_2) \ldots (y - \beta_i),$$

$$M = A_1 y^{i+1} + A_2 y^i + \ldots + A_{i+2} = f(x, y).$$

De plus on fera pour abréger

$$(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3) \ldots (\beta_1 - \beta_i) = d_1,$$

$$(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3) \ldots (\beta_2 - \beta_i) = d_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$(\beta_i - \beta_1)(\beta_i - \beta_2) \ldots (\beta_i - \beta_{i-1}) = d_i$$

et

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_i) = D_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(y_i - y_1)(y_i - y_2) \ldots (y_i - y_{i-1}) = D_i.$$

J'obsèrve enfin que supposer $A = 0$, c'est admettre qu'une solution particulière de (D) est donnée. En effet, cette solution étant $y = \nu$, on changera y en $u+\nu$, puis u en $\frac{1}{w}$: l'équation en w sera débarrassée du terme y^{i+2}, c'est-à-dire que M sera du degré $i+1$.

Cela posé, divisons M par N, donc $f(x, y)$ par $(y-\beta_1)\ldots(y-\beta_i)$; nous aurons

$$y' + A_1 y - A_1 B_1 + A_2 + \frac{f(x,\beta_1)}{d_1(y-\beta_1)} + \frac{f(x,\beta_2)}{d_2(y-\beta_2)} \ldots + \frac{f(x,\beta_i)}{d_i(y-\beta_i)} = 0, \ldots (D')$$

et on dévine que les termes fractionnaires proviennent de la décomposition de $\frac{M}{N}$ suivant les règles connues des fractions rationnelles.

On a aussi

$$y'_1 + A_1 y_1 - A_1 B_1 + A_2 + \frac{f(x\,\beta_1)}{d_1(y_1-\beta_1)} + \ldots + \frac{f(x\,\beta_i)}{d_i(y_1-\beta_i)} = 0,$$

attendu que $y = y_1$ est, par hypothèse, une solution particulière de la proposée.

Retranchant la dernière de la précédente, il vient

$$\frac{d}{dx}(y-y_1) + A_1(y-y_1) = (y-y_1)\left[\frac{f(x\beta_1)}{d_1(y-\beta_1)(y_1-\beta_1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{f(x,\beta_2)}{d_2(y-\beta_2)(y_1-\beta_2)} + \ldots\right].$$

D'où

$$\frac{d}{dx}\log(y-y_1) + A_1 = \frac{f(x,\beta_1)}{d_1(y-\beta_1)(y_1-\beta_1)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f(x,\beta_i)}{d_i(y-\beta_i)(y_1-\beta_i)} \ldots\ldots\ldots\ldots (D'').$$

Représentons le second membre de cette équation par R, et soit $F(x, y, C)$ une fonction des variables x, y et de la constante arbitraire C, définie par l'équation

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) - F.R = 0,$$

sachant que $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dx}y'$:

alors l'intégrale générale de la proposée sera

$$(y-y_1)e^{\int A_1 dx} = F(x,\ y,\ C).$$

En effet, la dérivée de cette dernière étant

$$\left[\frac{d}{dx}(y-y_1)+A_1(y-y_1)\right]e^{\int A_1 dx}=\left(\frac{dF}{dx}\right),$$

si l'on en retranche la primitive multipliée par R, il viendra

$$\left[\frac{d}{dx}(y-y_1)+A_1(y-y_1)-R\right]e^{\int A_1 dx}=\left(\frac{dF}{dx}\right)-F.R.$$

D'où

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)+A_1(y-y_1)-\left[\frac{f(x,\beta_1)}{d_1(y-\beta_1)(y_1-\beta_1)}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{f(x,\beta_1)}{d_i(y-\beta_i)(y_1-\beta_i)}\right]=0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)-F.R=0.$$

Cette fonction inconnue F pourra être trouvée toutes les fois que l'intégrale générale aura l'une des nombreuses formes considérées dans les *n*-os précédents, et voici comment.

Remplaçons y_1 dans (D'') tour à tour par y_2, $y_3 \ldots y_i$, et faisons, pour abréger,

$$\frac{d}{dx}\log(y-y_r)+A_1=\frac{u'_r}{u_r},$$

de façon que $\frac{d}{dx}\log(y-y_2)+A_1=\frac{u'_2}{u_2}$, etc;

nous aurons pour éliminer $i-1$ termes $\frac{f(x_1\beta_r)}{d_r(y-\beta_r)}$

i équations

$$\frac{u'_1}{u_1}=\frac{f(x\,\beta^1)}{d_1(y-\beta_1)}\cdot\frac{1}{y_1-\beta_1}+\ldots\ldots+\frac{f(x\,\beta_i)}{d_i(y-\beta_i)}\cdot\frac{1}{y_1-\beta_i}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{u'_i}{u_i}=\frac{f(x,\beta_1)}{d_1(y-\beta_1)}\cdot\frac{1}{y_i-\beta_1}+\ldots\ldots+\frac{f(x\,\beta_i)}{d_i(y-\beta_i)}\cdot\frac{1}{y_i-\beta_i}.$$

On en tire

$$\frac{f(x,\beta_r)}{d_r(y-\beta_r)}=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{1,r}\cdot\frac{u'_1}{u_1}+\Delta_{2,r}\frac{u'_2}{u_2}+\ldots+\Delta_{i,r}\cdot\frac{u'_i}{u_i}\right),$$

$$r=1,\ 2,\ldots i,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{y_1-\beta_1},&\frac{1}{y_1-\beta_2},&\cdots\frac{1}{y_1-\beta_i}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{y_i-\beta_1},&\frac{1}{y_i-\beta_2},&\cdots\frac{1}{y_i-\beta_i}\end{vmatrix},$$

et les $\Delta_{s,r}$ sont les déterminants mineurs.

Mais $$R=\sum_{r=1}^{r=i}\frac{f(x,\beta_r)}{d_r(y-y_r)},\ \text{donc}$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=\frac{F}{\Delta}\sum_{r=1}^{r=i}\left(\Delta_{1,r}\frac{u'_1}{u_1}+\Delta_{2,r}\cdot\frac{u'_2}{u_2}+\ldots+\Delta_{i,r}\frac{u'_i}{u_i}\right).$$

Supposons que les coefficients des dérivées $\frac{u'_1}{u_1}\ldots\frac{u'_i}{u_i}$ se réduisent à des constantes $n_1\ldots\ldots n_i$; nous aurons

$$F(x,\ y,\ C)=C(u_1^{n_1}u_2^{n_2}\ldots u_i^{n_i}),$$

et, par suite,

$$e^{\int A_1 a x}(y-y_1)=C(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}\ldots(y-y_i)^{n_i}\cdot e^{(n_1+n_2\ldots+n_i)\int A_1 dx}.$$

Ce qui est l'intégrale générale.

Au lieu de substituer la valeur de

$$\frac{f(x, \beta_r)}{d_r(y-\beta_r)}$$

immédiatement, on pourrait procéder comme ci-après.

A l'aide de nouvelles intégrales particulières, par exemple $y = y_{i+1}$, $y = y_{i+2}$, etc, on peut obtenir une ou même plusieurs expressions de la forme

$$\frac{f(x\ \beta_r)}{d_r(y-\beta_r)} = \frac{1}{\Delta'}\left[\ \Delta'_{1,r}\frac{v'_1}{v_1} + \Delta'_{2,2}\frac{v'_2}{v_2} + \dots\right],$$

sachant que

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{d}{dx}\log(y-y_{i+1}) + A_1, \qquad \frac{v'_2}{v_2} = \frac{d}{dx}\log(y-y_{i+2}) + A_1,$$

et ainsi de suite.

Multipliant les deux membres de cette dernière expression par une quantité indéterminée μ, et ajoutant à l'autre expression, nous trouverons une nouvelle valeur de $\frac{f(x\ \beta_r)}{d_r(y-\beta_r)}$, et, par conséquent, une nouvelle équation pour déterminer F(x, y, C).

Enfin rien n'empêche d'éliminer les termes fractionnaires de (D'), et de chercher la solution de l'équation

$$\Delta(y' + A_1 y - A_1B_1 + A_2) + \sum_{r=1}^{r=i}\left(\Delta_{1,r}\frac{u'_1}{u_1} + \dots + \Delta_{i,r}\frac{u'_i}{u_i}\right) = 0.$$

Si lon a, par exemple, $\Delta = e^{\int A_1 dx}$, $\Delta_{s,r}$ = constante, l'intégrale sera

$$ye^{\int A_1 dx} + \int e^{\int A_1 dx}(A_2 - A_1B_1)dx \,.\, (u_1^{a_1}u_2^{a_2}\dots u_i^{a_i}) = C.$$

16. Soient

$$N = y + B_1, \quad M = A_1y^2 + A_2y + A_3,$$
$$Ny' + M = 0.$$

Actuellement ce que nous avons représenté par $f(x\ \beta_1)$ se réduit à

$$A_3 - A_2B_1 + A_1B_1^2.$$

On aura donc

$$e^{\int A_1 dx}(y - y_1) = F(x,\ y,\ C),$$

F étant définie par l'équation

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) - F \cdot \frac{f(x, -B_1)}{NN_1} = 0.$$

Et puisque

$$N_1 \frac{d}{dx} \log(y - y_1) + N_1A_1 = \frac{f(x, -B_1)}{N}$$

$$N_2 \frac{d}{dx} \log(y - y_2) + N_2A_1 = \frac{f(x, -B_1)}{N}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_r \frac{d}{dx} \log(y - y_r) + N_rA_1 = \frac{f(x, -B_1)}{N},$$

il viendra

$$\frac{N_1m_1}{\Sigma m} \cdot \frac{d}{dx} \log(y - y_1) + \frac{N_2m_2}{\Sigma m} \frac{d}{dx} \log(y - y_2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{N_rm_r}{\Sigma m} \frac{d}{dx} \log(y - y_r) + A_1 \frac{\Sigma Nm}{\Sigma m} = \frac{f(x, -B)}{N}.$$

Éliminant à l'aide de cette équation

$$\frac{f(x, -B_1)}{NN_1} \text{ de } \left(\frac{dF}{dx}\right) - F \cdot \frac{f(x, -B_1)}{NN_1} = 0,$$

on trouve

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = F\left\{\frac{m_1}{\Sigma m} \cdot \frac{d}{dx} \log(y - y_1) + \frac{N_2m_2}{N_1\Sigma m} \frac{d}{dx} \log(y - y_2) \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{m_rN_r}{N_1\Sigma m} \frac{d}{dx} \log(y - y_r) + \frac{A_1}{N_1} \frac{\Sigma Nm}{\Sigma m}\right\}.$$

Posons $\frac{m_1}{\Sigma m} = \text{constante } n_1$, $\frac{N_2m_2}{N_1\Sigma m} = n_2 \ldots\ \frac{m_rN_r}{N_1\Sigma m} = n_r$;

la valeur de F sera

$$F = Ce^{\int \frac{A_1}{N_1} \Sigma \frac{Nm}{\Sigma m} dx} (y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2} \ldots (y-y_r)^{n_r},$$

et par suite

$$e^{\int A_1 dx} (y-y_1)^{1-n_1} = Ce^{\int \frac{A_1}{N_1} \frac{\Sigma Nm}{\Sigma m} dx} (y-y_2)^{n_2} \ldots (y-y_r)^{n_r}.$$

Ler r facteurs m ne suffiront pas pour vérifier les conditions trouvées plus haut, il en résultera en outre la relation

$$(n_1-1)N_2N_3 \ldots N_r + n_2N_1N_3 \ldots N_r + \ldots + n_rN_1 \ldots N_{r-1} = 0,$$

trouvée précédemment.

On pourrait, comme j'ai dé à dit, éliminer $\frac{f(x,-B_1)}{N}$ de l'équation

$$y' + A_1y + A_2 - A_1B_1 + \frac{f(x,-B)}{N} = 0,$$

et chercher la solution de

$$y' + A_1y + A_2 - A_1B_1 + \frac{N_1m_1}{\Sigma m} \frac{d}{dx} \log (y-y_1) + \ldots + \frac{A_1 \Sigma Nm}{\Sigma m} = 0.$$

L'intégrale se présentera sous la forme

$$ye^{\int A_1 dx} + \int e^{\int A_1 dx} (A_2 - A_1B_1 + \ldots) dx = C$$
$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2} \ldots (y-y_r)^{n_r}$$

si l'on détermine les facteurs m de manière à vérifier les conditions

$$\frac{N_1m_1}{\Sigma m} = n_1 \ldots \frac{N_rm_r}{\Sigma m} = n_r,$$

et qu'en outre la condition

$$e^{\int A_1 dx} = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \ldots + \frac{n_r}{N_r}$$

se trouve satisfaite.

17. A l'égard des solutions particulières je puis démontrer deux propositions qui ne manquent pas d'importance.

Proposition 1-re. — Soit

$$y'(y+B_1)+A_1y^2+A_2y+A_3=0$$

l'équation donnée, et faisons

$$A_2-A_1B_1+\frac{A_3-A_2B_1+A_1B_1^2}{y_1+B_1}=R_1;$$

je dis que *si* $y=y_1$ *est une solution particulière, l'ensemble de toutes ces solutions sera compris dans la formule*

$$y=e^{-\int\frac{A_1y+A_2-R_1}{y_1+B_1}dx}\left[C-\int e^{\int\frac{A_1y_1+A_2-R_1}{y_1+B_1}dx}\left(\frac{R_1y_1+A_3}{y_1+B_1}\right)dx\right]\ldots\ldots\ldots(\alpha).$$

Démonstration. — Posant pour abréger

$$\frac{A_1y_1+A_2-R_1}{N_1}=Q,\qquad A_2-A_1B_1-R_1=P,\qquad B_1R_1-A_3=P_1$$

substituons la valeur (α) de y dans l'équation donnée; nous trouverons d'abord

$$e^{-2\int Q dx}\left[C-\int e^{\int Q dx}\frac{(R_1y_1+A_3)}{N_1}dx\right]^2\cdot\frac{P}{N_1}-$$

$$-e^{-\int Q dx}\left[C-\int e^{\int Q dx}\frac{(R_1y_1+A_3)}{N_1}dx\right]\cdot\frac{Py_1+P_1}{N_1}+\frac{P_1y_1}{N_1}=0,$$

puis

$$e^{-\int Q dx}\left[C-\int e^{\int Q dx}\frac{(R_1y_1+A_3)}{N_1}dx\right]=\frac{Py_1+P_1\pm(Py_1-P_1)}{2P}.$$

Si l'on prend Py_1-P_1 avec le signe positif, il viendra

$$C-\int e^{\int Q dx}\frac{(R_1y_1+A_3)}{N_1}dx=e^{\int Q dx}\cdot y_1,$$

et, par différentiation, toute réduction faite,

$$(y_1+B_1)y'_1+A_1y_1^2+A_2y_1+A_3=0,$$

ce qui confirme la proposition.

En prenant Py_1-P_1 avec le signe négatif, on revient encore à cette équation, attendu que

$$R_1=A_2-A_1B_1+\frac{A_3-A_2B_1+A_1B_1^2}{N_1}.$$

La proposition se trouve donc établie.

18. Elle est vraie encore dans le cas général

$$y'(y^i+B_1y^{i-1}+\ldots+B_i)+Ay^{i+2}+A_1y^{i+1}+A_2y^i+\ldots+A_{i+2}=0,$$

bien que la substitution soit impossible. Pour le prouver, il suffit de faire connaître la manière dont on *a* déduit la valeur (α) de y.

L'équation

$$y'(y+B_1)+A_1y^2+A_2y+A_3=0$$

se décompose en celles-ci:

$$y'+A_1y+u=0$$
$$B_1y'+(A_2-u)y+A_3=0.$$

Si l'on élimine u, on retombe sur la proposée, et en éliminant y' on trouve

$$u=A_2-B_1A_1+\frac{A_3-B_1A_2+B_1^2A_1}{y+X_1}.$$

Cette valeur de u étant substituée dans l'une de ces deux équations-là on trouvera l'équation

$$y'+A_1y-A_1B_1+A_2+\frac{A_3-B_1A_2+B_1^2A_1}{N}=0,$$

qui n'est autre que la proposée.

Si au contraire on tire la valeur de y pour la substituer dans la proposée, on trouvera une équation de la forme

$$\alpha u'+\alpha_1u^3+\alpha_2u^2+\alpha_3u=0.$$

Ce que nous avons désigné précédemment par R_1 n'est donc autre chose qu'une intégrale particulière de cette dernière équation en u.

Cela compris, prenons la somme des deux équations

$$y' + A_1 y + u = 0$$
$$B_1 y' + (A_2 - u)y + A_3 = 0,$$

après avoir multiplié la première par y_1; nous aurons

$$y'(y_1 + X_1) + (A_1 y_1 + A_2 - u)y + y_1 u + A_3 = 0,$$

et il ne faut pas oublier que y_1 est une intégrale particulière de la proposée. Remplaçons enfin u par la valeur particulière R_1 de cette fonction; il viendra

$$y'(y_1 + X_1) + (A_1 y_1 + A_2 - R_1)y + y_1 R_1 + A_3 = 0.$$

Intégrant cette équation qni est linéaire du 1-r ordre par rapport à y, on arrive à la valeur (α) trouvée plus haut.

Dans le cas général la décomposition se fera de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{l} Ay + u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y' + (A_1 - u)y + u_1 = 0 \ldots\ldots\ldots \\ B_1 y' + (A_2 - u_1)y + u_2 = 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{i-1} y' + (A_i - u_{i-1})y + u_i = 0 \ldots\ldots \\ B_i\, y' + (A_{i+1} - u_i)y + A_{i+2} = 0 \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (S).$$

Après quoi, multipliant la 1-re par y_1^{i+1}, la 2-me par y_1^{i}, la 3-me par y_1^{i-1} ..... l'avant-dernière par y_1, et ajoutant les résultats à la dernière équation, nous aurons

$$(y_1^{i} + B_1 y_1^{i-1} + B_2 y_1^{i-2} + \ldots + B_{i-1} y_1 + B_i)y'$$
$$+ (A y_1^{i+1} + A_1 y_1^{i} - u y_1^{i} + A_2 y^{i-1} - u_1 y_1^{i-1} + \ldots + A_{i+1} - u_i)y$$
$$+ u y_1^{i+1} + u_1 y_1^{i} + u_2 y_1^{i-1} + \ldots + u_i y_1 + A_{i+2} = 0.$$

Remplaçons maintenant les u, u_1, $u_2 \ldots u_i$ par des valeurs particulières de ces fonctions, que nous représenterons par v, v_1,

$v_2 \ldots v_i$ respectivement; posons ensuite pour abréger

$$\frac{Ay_1^{i+1} + A_1 y_1^{i} + \ldots + A_{i+1}}{N_1} = P, \quad \frac{v y_1^{i+1} + v_1 y_1^{i} + \ldots + v_i}{N_1} = Q,$$

et intégrons; il viendra:

$$y = e^{-\int (P-Q)dx} \left[K - \int e^{\int (P-Q)dx} \cdot \left(Q y_1 + \frac{A_{i+2}}{N_1} \right) dx \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha_r)$$

où K représente la constante arbitraire.

Cette valeur de y, étant substituée dans la proposée, fournira d'abord l'équation $N_1 y_1' + M_1 = 0$, et puis $i+1$ équations pour déterminer les $i+1$ fonctions $v, v_1 \ldots v_i$. Ces dernières valeurs seront connues si y_1 est donnée; en d'autres termes, ces $i+1$ équations seront toutes susceptibles d'être ramenées à $N_1 y'_1 + M_1 = 0$, attendu que la 1-re des équations (S) donne

$$v = -Ay_1;$$

en éliminant ensite y_1' entre les équations

$$\begin{aligned}
&y'_1 + (A_1 + Ay_1) y_1 + v_1 = 0 \\
&B_1 y'_1 + (A_2 - v_1) y_1 + v_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&B_{i-1} y'_1 + (A_i - v_{i-1}) y_1 + v_i = 0 \\
&B_i y'_1 + (A_{i+1} - v_i) y_1 + A_{i+2} = 0,
\end{aligned}$$

on déterminera successivement v_i, $v_{i-1} \ldots v_1$ en fonction de y_1 et des quantités données.

Soit, par exemple, $i = 1$; le système deviendra

$$\begin{aligned}
&Ay_1 + v = 0 \\
&y'_1 + (A_1 - v) y_1 + v_1 = 0 \\
&B_1 y'_1 + (A_2 - v_1) y_1 + A_3 = 0.
\end{aligned}$$

Substituant $-Ay_1$ au lieu de v dans la 2-me de ces équations, on trouve

$$\begin{aligned}
&y'_1 + (A_1 + Ay_1) y_1 + v_1 = 0 \\
&B_1 y'_1 + (A_2 - v_1) y_1 + A_3 = 0.
\end{aligned}$$

Éliminant y'_1, il vient

$$(y_1+B_1)v_1+A_1B_1y_1+AB_1y_1^2-A_2y_1-A_3=0.$$

D'où

$$v_1=\frac{A_3+y_1(A_2-A_1B_1)-AB_1y_1^2}{y_1+B_1}.$$

De cette manière la valeur de y s'exprime en fonction d'une seule intégrale particulière y_1, des quantités données A, A_1, .. A_{i+2}, $B_1 \ldots B_i$, et de la constante arbitraire K.

Donc le second membre de (α_r) est l'ensemble de toutes les solutions particulières de l'équation

$$Ny'+M=0$$

N et M étant deux polynomes entiers en y, quelconques en x.

19. *Proposition* 2. — *En désignant par* α_1, α_2, β_1, β_2 *deux valeurs particulières des fonctions* α *et* β *respectivement propres à vérifier les équations* (A) *du chapitre* II (n° 1), donc

$$\frac{d}{dx}[N\alpha_1+M\beta_1]=a_1\alpha_1P, \qquad \frac{d}{dy}[N\alpha_1+M\beta_1]=a_1\beta_1P,$$

$$\frac{d}{dx}[N\alpha_2+M\beta_2]=a_2\alpha_2P, \qquad \frac{d}{dy}[N\alpha_2+M\beta_2]=a_2\beta_2P,$$

toutes les intégrales particulières de la proposée, $Ny'-M=0$, N et M étant fonctions entières en y, *seront comprises dans le produit*

$$(N\alpha_1+M\beta_1)(N\alpha_2+M\beta_2)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (p).$$

Démonstration — Je suppose pour le moment N et M fonctions entières relativement à la variable y; je le fais pour m'appuyer sur le théorème de Minding. En effet, il résulte de ce théorème, que toute valeur de y, propre à réduire la constante arbitraire C soit à $C=0$, soit à $C=\infty$, est une intégrale particulière de $Ny'-M=0$. Or, l'intégrale générale étant

$$C=\frac{(N\alpha_1+M\beta_1)^{\frac{1}{a_1}}}{(N\alpha_2+M\beta_2)^{\frac{1}{a_2}}},$$

on a pour $N\alpha_1 + M\beta_1 = 0$ $C = 0$, et pour $N\alpha_2 + M\beta_2 = 0$ $C = \infty$, donc les solutions particulières sont comprises dans le produit

$$(N\alpha_1 + M\beta_1)(N\alpha_2 + M\beta_2) = 0.$$

Mais on va voir que cette proposition est vraie aussi dans le cas général, lorsque N et M sont des fonctions quelconques en y comme en x.

En effet, prenons la dérivée totale de l'équation

$$(N\alpha_1 + M\beta_1)(N\alpha_2 + M\beta_2) = 0$$

et substituons dans le résultat

$$a_1\alpha_1 P \text{ au lieu de } \frac{d}{dx}(N\alpha_1 + M\beta_1),$$

$$a_2\alpha_2 P \quad - \quad - \quad \frac{d}{dx}(N\alpha_2 + M\beta_2),$$

$$a_1\beta_1 P \quad - \quad - \quad \frac{d}{dy}(N\alpha_1 + M\beta_1),$$

$$a_2\beta_2 P \quad - \quad - \quad \frac{d}{dy}(N\alpha_2 + M\beta_2);$$

nous aurons, après réduction,

$$Ny' = -M\,\frac{\left[\frac{N}{M}\alpha_1\alpha_2(a_1+a_2) + \alpha_1\beta_2 a_1 + \alpha_2\beta_1 a_2\right]}{\left[\frac{M}{N}\beta_1\beta_2(a_1+a_2) + a_1\beta_1\alpha_2 + a_2\beta_2\alpha_1\right]}.$$

Mais

$$\frac{\frac{N}{M}\alpha_1\alpha_2(a_1+a_2) + \alpha_1\beta_2 a_1 + \alpha_2\beta_1 a_2}{\frac{M}{N}\beta_1\beta_2(a_1+a_2) + a_1\beta_1\alpha_2 + a_2\beta_2\alpha_1} = -1,$$

donc

$$Ny' = M.$$

Ce qui est la proposée.

Or, $(N\alpha_1 + M\beta_1)(N\alpha_2 + M\beta_2) = 0$ n'étant pas la solution générale, il s'en suit que c'est l'ensemble de toutes les solutions particulières de $Ny' = M$.

20. En combinant les deux propositions que je viens de démontrer à l'égard de l'équation $Ny' = M$, N et M étant fonctions

entières relativement à y, on entrevoit la possibilité de déduire la solution générale de cette équation, et voici comment.

J'observerai d'abord qu'il faut changer dans la valeur de y, déterminée par la formule (α_r) (n° 18), les coefficients A, $A_1 \ldots A_{i+2}$ en $-A, -A_1, \ldots -A_{i+2}$ respectivement, attendu que la proposée n'est pas $Ny' + M = 0$, mais $Ny' - M = 0$.

Ceci fait, attribuons à la constante K un nombre quelconque r de valeurs particulières et soient $y = y_2$, $y = y_3 \ldots y = y_{r+1}$ les valeurs correspondantes de y. Attribuons ensuite à la même constante un autre nombre p de valeurs particulières et soient $y = m_1$, $y = m_2, \ldots y = m_p$ les valeurs correspondantes de y. Enfin désignons par Q une fonction rationnelle en y et quelconque relativement à x, et formons l'expression

$$Q^b \cdot \frac{(y-y_2)^{n_1}(y-y_3)^{n_2}\ldots(y-y_{r+1})^{n_r}}{(y-m_1)^{b_1}(y-m_2)^{b_2}\ldots(y-m_p)^{b_p}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\frac{(N\alpha_1 + M\beta_1)^{\frac{1}{a_1}}}{(N\alpha_2 + M\beta_3)^{\frac{1}{a_2}}} = C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

et n'oublions pas que $Ny' - M = 0$ est précisément l'équation dont on a déduit la valeur (α_r) (cela s'entend que A est remplacé par $-A$, etc).

Il est évident d'abord que toutes les intégrales particulières qui entrent dans (q) sont comprises dans le premier membre de (A), et rien n'empêche de supposer que, réciproquement, toutes les solutions comprises dans le produit $(N\alpha_1 + M\beta_1)(N\alpha_2 + M\beta_2)$ soient contenues aussi dans le facteur

$$\frac{(y-y_2)^{n_1}\ldots(y-y_{r+1})^{n_r}}{(y-m_1)^{b_1}\ldots(y-m_p)^{b_p}}.$$

Il s'en suit que l'on peut poser $Q = 1$ et admettre que la solution générale (A) est identique avec

$$\frac{(y-y_2)^{n_1}\ldots(y-y_{r+1})^{n_r}}{(y-m_1)^{b_1}\ldots(y-m_p)^{b_p}} = C \ldots\ldots\ldots\ldots (A').$$

Donc, *si toutefois la solution* $y = y_1$ *existe,* la solution générale de $Ny' = M$, N et M étant des polynomes entiers en y, doit être (A').

J'ajouterai cependant que, comme je ne puis pas démontrer qu'il est toujours possible de transformer l'intégrale de la forme

$$e^{-W} = C$$

donnée par Minding en (A'), il est nécessaire d'énoncer notre corollaire sous la forme suivante:

Si l'équation $Ny' - M = 0$, N *et* M *étant des fonctions entières relativement à* y *et quelconques en* x, *admet une solution de la forme*

$$y = y_1,$$

l'intégrale générale sera

$$e^{V+R}(y-y_2)^{\varepsilon_1}(y-y_3)^{\varepsilon_2}\ldots(y-y_\mu)^{\varepsilon_{\mu-1}} = C,$$

V *étant une fonction entière par rapport à* y, *et* R *une fonction rationnelle par rapport à cette variable et quelconque en* x.

CHAPITRE IV.

Application des méthodes précédentes aux équations différentielles linéaires,

21. On sait que l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$y^{(n)} + X_{n-1}y^{(n-1)} + X_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + X_1 y' + Xy = 0 \ldots (1)$$

est la somme des intégrales particulières; de sorte que si l'on représente par $y_1, y_2 \ldots y_n$ ces intégrales, on aura

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

les c étant les n constantes arbitraires.

Proposition. — Faisons

$$D = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)} \ldots y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)} \ldots y_n \end{vmatrix},$$

sachant que, en vertu de la notation adoptée, $y_r^{(s)}$ représente la dérivée $s^{\text{ième}}$ de l'intégrale particulière y_r et D est, comme toujours, le déterminant qne l'on déduit en éliminant les coefficients $X_{n-1} \ldots . X$, à l'exception d'un seul, du système

$$X_{n-1} y_1^{(n-1)} + X_{n-2} y_1^{(n-2)} + \ldots + X_1 y'_1 + X y_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{n-1} y_n^{(n-1)} + X_{n-2} y_2^{(n-2)} + \ldots + X_1 y'_n + X y_n = 0.$$

Je dis que

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}}$$

est le facteur intégrant de l'équation donnée, et

$$\frac{1}{D}\left\{\frac{dD}{dy_r^{(n-1)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{dD}{dy_r^{(n-2)}} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy'_r} y' + \frac{dD}{dy_r} y\right\} = c_r \ldots (2)$$

le terme général des intégrales premières.

Démonstration. Attribuons à r dans (2) les valeurs 1, 2, 3,... n successivement, et multiplions les résultats par D; nous aurons les n équations suivantes:

$$\frac{dD}{dy_1^{(n-1)}} y^{(n-1)} + \frac{dD}{dy_1^{(n-2)}} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy_1} y = c_1 D$$
$$\frac{dD}{dy_2^{(n-1)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{dD}{dy_2^{(n-2)}} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy_2} y = c_2 D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{dD}{dy_n^{(n-2)}} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy_n} \cdot y = c_n D.$$

Éliminant les dérivées de y, on trouve

$$y.D^{n-1} = D^{n-1}\left[c_1 \frac{d^{n-1}D}{dy_2^{(n-1)} \ldots dy'_n} - c_2 \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{n-1}.dy_3^{(n-2}\ldots} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{n+1} c_n \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{(n-1)} \ldots dy'_{n-1}} \right].$$

Mais on a aussi

$$\frac{d^{n-1}D}{dy_2^{(n-1)} \ldots dy'_n} = y_1, \quad \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{n-1} \ldots dy'_n} = -y_2, \ldots$$

$$\frac{d^{n-1}D}{dy^{(n-1)} \ldots dy'_{n-1}} = (-1)^{n+1} y_n;$$

donc $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Ce qui prouve que (2) est réellement le terme général des integrales premières de (1).

Du moment qne cette partie de la proposition est vraie, l'autre l'est aussi, car, en prenant la dérivée de (2) et comparant ensuite le résultat à (1), on trouve que

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}}$$

est le coefficient de $y^{(n)}$; ce qui ne peut être que si cette quantité entre dans le résultat comme facteur commun. Par suite (1) multipliée par $\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}}$ est la dérivée exacte de (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition est dûe à M. S. Jurieff (mathématicien de Moscou).

Corollaire.—M. Liouville a trouvé que la valeur de D est

$$D = ce^{-\int X_{n-1} dx}$$

donc $$e^{-\int X_{n-1} dx} \cdot \frac{dD}{dy_r^{n-1}}$$

est la valeur du facteur intégrant de (1).

22. On sait aussi que si l'on connaît $n-1$ intégrales particulières de (1) on connaîtra aussi l'intégrale $n^{\text{ième}}$, et, par suite, la valeur générale de y, ou, simplement, l'intégrale générale.

Je puis démontrer que *si l'on donne une seule valeur particulière du quotient* $\frac{y_n}{y_1}$, *de deux intégrales particulières quelconques, on trouvera aussi l'intégrale générale de* (1); il suffit même de connaître la dérivée de ce quotient, c'est-à-dire $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_1}\right)$, ou plutôt une valeur particulière de cette dérivée. Toutefois je ne puis le démontrer que de proche en proche.

A l'égard de l'équation du 2-d ordre, la démonstration n'offre aucune difficulté.

Je supposerai cette équation délivrée de son second terme, c'est-à-dire de la forme

$$y''+Xy=0.$$

L'une des intégrales particulières étant $y=y_1$, l'autre sera

$$y_2=y_1\int u dx.$$

Substituant cette valeur de y_2 dans l'équation

$$y''_2+Xy_2=0,$$

on trouvera d'abord

$$(y''_1+Xy_1)\int u dx+2y'_1u+y_1u'=0,$$

et puis

$$2uy'_1+y_1u'=0.$$

D'où

$$y_1=c_1u^{-\frac{1}{2}}.$$

Or u n'est autre chose que la dérivée

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

si donc on connaît une valeur particulière de cette dérivée, on connaîtra aussi y_1 et y_2, et l'intégrale générale sera

$$y=u^{-\frac{1}{2}}(c_1+c_2\int u dx).$$

Quant à l'équation qui détermine u, on la trouvera soit en substituant $\overline{u}^{\frac{1}{2}}$ au lieu de y_1 dans

$$y''_1 + Xy_1 = 0,$$

soit en éliminant y''_1 et y'_1 des trois équations suivantes:

$$y''_1 + Xy_1 = 0$$

$$2uy''_1 + 3y'_1u' + y_1u'' = 0$$

$$2uy'_1 + y_1u' = 0.$$

On trouvera dans les deux cas

$$u\,u'' - \frac{3}{2}\,u'^2 - 2Xu^2 = 0.$$

Elle est du 2-d ordre non-linéaire, mais, en faisant

$$p = \frac{u'}{u},$$

on la transforme en celle-ci

$$p' - \frac{1}{2}\,p^2 - 2X = 0.$$

23. Considérons ensuite l'équation du 3-me ordre

$$y''' + X_1y' + Xy = 0,$$

que je suppose encore sans second terme.

Les trois intégrales particulières étant comme toujours

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,$$

on a

$$y_2 = y_1\int v\,dx, \qquad y_3 = y_1\int u\,dx.$$

Substituant chacune de ces deux valeurs dans l'équation

$$y'''_r + X_1y'_r + Xy_r = 0,$$

nous aurons, en vertu de cette même équation,

$$3vy_1'' + 3v'y'_1 + y_1(v'' + X_1v) = 0$$

$$3uy_1'' + 3u'y'_1 + y_1(u'' + X_1u) = 0.$$

Éliminant y''_1, nous trouverons la dérivée exacte de

$$y_1^3(v'u - vu') = c_1;$$

en sorte que si l'on connaissait y_1 et u, on déduirait immédiatement

$$v = u\left(c_2 + c_1 \int \frac{dx}{u^2 . y_1^3}\right),$$

$$y = y_1\left[c_3 + \int u\left(c_2 + c_1 \int \frac{dx}{u^2 y_1^3}\right) dx\right].$$

Éliminons y'''_1 et y''_1 des trois équations suivantes:

$$y'''_1 + X_1 y'_1 + X y_1 = 0$$

$$3uy''_1 + 3u'y'_1 + y_1(u'' + X_1 u) = 0$$

$$3uy'''_1 + 6u'y'_1 + y'_1(4u'' + X_1 u) + y_1(u''' + X_1 u' + X'_1 u) = 0;$$

nous aurons pour déterminer y_1 l'équation

$$4(uu'' - \frac{3}{2}u'^2 - \frac{1}{2}X_1 u^2)y'_1 + [uu''' - 2u'u'' - X_1 uu' + u^2(X'_1 - 3X)]y_1 = 0.$$

Posant pour abréger

$$m = uu'' - \frac{3}{2}u'^2 - \frac{1}{2}X_1 u^2,$$

et intégrant la précédente par rapport à y_1, il vient

$$y_1 = k . m^{-\frac{1}{4}} . e^{-\frac{3}{8}\int \frac{u^2(X'_1 - 2X)dx}{m}}.$$

Mais u n'est autre chose que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right),$$

donc si l'on connaît une valeur quelconque de cette dérivée, c'est-à-dire de u, l'intégrale générale sera

$$y = m^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{3}{8}\int \frac{u^2}{m}(X'_1 - 2X)dx} \left[c_3 + \int u\left(c_2 + c_1 \int \frac{m^{\frac{3}{4}}}{u^2} . e^{\frac{9}{8}\int \frac{u^2}{m}(X'_1 - 2X)dx} . dx\right) dx\right].$$

Si maintenant on substitue la valeur de y_1 dans l'équation

$$y'''_1 + X_1 y'_1 + X y_1 = 0,$$

et que l'on fasse

$$\frac{u'}{u} = p,$$

il viendra

$$(X_1 + p^2 - 2p')p''' + \frac{5}{2}p''^2 - \frac{1}{4}(3pp' + p^3 + pX_1 - 2X'_1 + 9X)p''$$

$$+ \frac{2}{3}p'^3 + (6X_1 + 7p^2)\frac{p'^2}{2} - [p^4 + 4X_1 p^2 - (2X'_1 - 9X)p + 3X^2_1 +$$

$$+ 2X_1'' - 6X']p'$$

$$+ \frac{1}{6}p^6 + X_1 p^4 + \frac{1}{2}p^2(3X^2_1 + 2X''_1 - 6X') + X_1 X''_1 - \frac{1}{2}X'^2_1 - 3X_1 X'$$

$$+ \frac{2}{3}X^3_1 + \frac{9}{2}X^2 = 0.$$

Faisons maintenant quelques observations.

1° L'équation sans second terme se déduit de l'équation avec ce terme au moyen de la substitution

$$z = y\, e^{-\frac{1}{n}\int X_{n-1}\, dx},$$

sachant que l'équation donnée est en z et du $n^{\text{ième}}$ ordre. Il s'en suit que l'équation en p, dont il s'agit de trouver une solution particulière, se déduit, lors de $n = 2$, par le changement de $-2X$ en

$$X'_1 + \frac{1}{2}X^2_1 - 2X,$$

et lors de $n = 3$ en changeant

$$X_1 \text{ en } -X'_2 - \frac{1}{3}X^2_2 + X_1,$$

$$\text{et } X \text{ en } -\frac{1}{3}X''_2 + \frac{2}{27}X^3_2 - \frac{X_1 X_2}{3} + X.$$

2° Supposons que l'on sache trouver une intégrale particulière de l'équation

$$p' - \frac{1}{2} p^2 - 2f(x) = 0;$$

on tirera alors de l'équation

$$X'_1 + \frac{1}{2} X^2_1 - 2X = -2f(x)$$

la valeur de X, on la substituera dans l'équation donnée, et il en résultera une nouvelle équation que l'on saura intégrer.

3°. L'équation en u s'obtient soit par la substitution de la valeur de y_1 dans la proposée, soit en éliminant les dérivées de y_1 entre les différentes équations qui entrent dans la question, et cette équation finale est de l'ordre 2, quand $n = 2$, et du 4-me ordre quand $n = 3$.

Toutes ces remarques s'étendent au cas géneral, et on va voir, nommément, quant à la dernière remarque, que l'équation en u doit être de l'ordre

$$2(n - 1),$$

et qu'elle s'abaissera d'une unité par la substitution

$$\frac{u'}{u} = p.$$

24. Soit donc

$$y^{IV} + X_2 y'' + X_1 y' + Xy = 0$$

l'équation donnée délivrée de son second terme, et représentons par y_1, y_2, y_3, y_4 les 4 intégrales particulières de cette équation.

Sachant que la dépendance qui existe entre ces intégrales peut s'exprimer par les formules

$$y_2 = y_1 \int u\,dx, \quad y_3 = y_1 \int v dx, \quad y_4 = y_1 \int w dx,$$

on substituera ces trois valeurs successivement dans l'équation

$$y_r^{IV} + X_2 y''_r + X_1 y'_r + X y_r = 0,$$

$r = 2,\ 3,\ 4$; les trois résultats se réduiront, en vertu de l'équation

$$y_1^{IV} + X_2 y_1'' + X_1 y_1' + X y_1 = 0,$$

aux trois équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &4uy_1''' + 6u'y_1'' + (4u'' + 2X_2u)y_1' + (u''' + X_2u' + X_1u)y_1 = 0 \\ &4vy_1''' + 6v'y_1'' + (4v'' + 2X_2v)y_1' + (v''' + X_2v' + X_1v)y_1 = 0 \\ &4wy_1''' + 6w'y_1'' + (4w'' + 2X_2w)y_1' + (w''' + X_2w' + X_1w)y_1 = 0. \end{aligned}\right\} \ldots (a).$$

Éliminant y_1''' tour à tour entre la 1-re et la 2-de, entre la 1-re et la 3-me et faisant dans les résultats

$$u.v' - u'v = q_1$$
$$u.w' - u'w = p_1$$

nous aurons

$$6p_1y_1'' + 4p_1'y_1' + y_1\left(p_1'' - p_1'\frac{u'}{u} + p_1\frac{u''}{u} + X_2p_1\right) = 0$$

$$6q_1y_1'' + 4q_1'y_1' + y_1\left(q_1'' - q_1'\frac{u'}{u} + q_1\frac{u''}{u} + X_2q_1\right) = 0.$$

Multipliant la première par q_1, la dernière par p_1, et retranchant l'une de l'autre, il viendra

$$4y_1'(p_1'q_1 - p_1q_1') + y_1\left[p_1''q_1 - q_1''p_1 - \frac{u'}{u}(p_1'q_1 - p_1q_1')\right] = 0.$$

D'où

$$\frac{y_1^4}{u}(p_1'q_1 - p_1q_1') = \text{const. arbit. } c_1.$$

Il est visible que l'on peut éliminer y_1^{IV} et y_1''' entre la 1-re des équations (a), sa dérivée et celle-ci

$$y_1^{IV} + X_2y_1'' + X_1y_1' + Xy_1 = 0.$$

Soit

$$f_1(u'')y_1'' + f_2(u''')y_1' + f_3(u^{IV})y_1 = 0$$

le résultat de la dite élimination. On comprend que les symboles $f_1(u'')$, $f_2(u''')$, $f_3(u^{IV})$ servent à rappeler que les coefficients respectifs sont d'ordres 2, 3, 4 par rapport à u.

Si maintenant entre cette dernière équation et sa dérivée première, à l'aide de la première des équations (a) on élimine y_1''' et y_1'', on aura une équation de la forme

$$\Phi_1(u^{IV})y_1' = \Phi_2(u^V)y_1,$$

et qui sera du 5-me ordre par rapport à u.

On en déduira la valeur de y_1 en fonction de x, de u et des dérivées de cette dernière variable.

Pour arriver enfin à l'équation finale en u, on éliminera y_1'' et y_1' entre les équations

$$f_1(u'')y_1'' + f_2(u''')y_1' + f_3(u^{IV})y_1 = 0$$

$$\Phi_1(u^{IV})y_1' = \Phi_2(u^V)y_1,$$

et la dérivée première de la dernière de ces deux équations; il viendra, après réduction,

$$F(u^{VI}) = 0.$$

C'est-à-dire que l'ordre de l'équation en u sera $2(n-1)=6$.

Je vais trouver maintenant la valeur de q_1.

Pour cet effet éliminons y_1^{IV}, y_1''' et y_1'' entre les équations

$$y_1^{IV} + X_2 y_1'' + X_1 y_1' + X y_1 = 0,$$

$$6q_1y_1'' + 4q_1'y_1' + y_1\left(q'' - q_1'\frac{u'}{u} + q_1\frac{u''}{u} + X_3 q_1\right) = 0,$$

la 1-re des équations (a) et sa dérivée, après quoi, entre l'équation qui résultera de cette élimination et

$$\Phi_1(u^{IV})y'_1 = \Phi_2(u^V)y_1$$

éliminons y'_1; alors y_1 disparaîtra aussi et nous aurons

$$\varphi_1(u^{IV})q_1'' + \varphi_2(u^V)q_1' + \varphi_3(u^V)q_1 = 0.$$

Et comme on peut obtenir une seconde équation de la forme

$$q_1'' + \psi_1(u^V)q_1' + \psi_2(u^{VI})q_1 = 0$$

en éliminant y_1 et ses dérivées entre les équations

$$\Phi_1(u^{IV})\,y_1' = \Phi_2(u^V)y_1$$

$$6q_1y_1'' + 4q_1'y_1' + y_1\left(q'' - q_1'\frac{u'}{u} + q_1\frac{u''}{u} + X_2 q_1\right) = 0,$$

il s'en suit que l'équation pour déterminer q_1 sera de la forme

$$\Phi_3(u^V)q' = \Phi_4(u^{VI})q.$$

Après avoir trouvé q_1 et y_1, il ne s'agira que de déduire

successivement les valeurs de p_1, v et w des trois équations suivantes:

$$\frac{y_1^4}{u}(p_1'q_1 - p_1q_1') = c_1,$$

$$uv' - u'v = p_1,$$

$$uw' - u'w = q_1.$$

Ceci n'offrira évidemment aucune difficulté.

Tout revient ainsi à connaître une solution particulière de l'équation finale en u, qui sera de l'ordre $2(n-1)$, ou, si l'on veut, de l'équation en $p = \frac{u'}{u}$, qui sera de l'ordre $2(n-1)-1$. Or, u n'est autre chose que la dérivée du quotient $\frac{y_2}{y_1}$, donc la proposition est établie, et elle s'étend évidemment à l'équation générale

$$y^{(n)} + X_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + X_1y' + Xy = 0.$$

25. On me dira, peut-être, que la solution particulière de l'équation en u est tout aussi difficile à trouver que les $n-1$ intégrales de la proposée; il convient donc de définir exactement la portée de ma proposition.

1° On n'a absolument aucune donnée pour trouver les intégrales particulières de la proposée; on dit, il est vrai, que $y = y_1$ doit satisfaire à cette équation, mais on ne sait même pas si cette solution existe. Qu'est ce qui est donc plus difficile de trouver: $n-1$ *choses qui n'existent peut-être pas,* ou bien *une seule chose* semblable?

2° Quant à l'équation d'ordre n, ce que je suppose donné se réduit à *deux intégrales particulières de la proposée,* c'est-à-dire de l'équation

$$y^{(n)} + X_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + X_1y' + Xy = 0.$$

Soient y_1 et y_2 les deux valeurs de ces intégrales: je prends le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ et je trouve ainsi ma solution particulière de l'équation en u. Donc *au lieu de* $n-1$ *choses il ne m'en faut que deux.*

3° Ma méthode permet de résoudre complètement une classe nombreuse d'équations que l'on ne saurait intégrer autrement. Pour le faire voir il suffit de supposer $n=3$ et de considérer notre équation en p trouvée plus haut (n° 23). Je ferai dans cette équation $p=0$, $p=$constante, $p=ax+b$, etc, et je trouverai, sans tâtonnement, autant de relations entre les quantités données X_1 et X que l'on voudra; ces conditions remplies, je trouverai aussi les solutions générales de la proposée.

4° Enfin ma proposition établit une nouvelle relation entre les équations linéaires et non-linéaires; il en résulte l'existence d'une classe nombreuse d'équations non-linéaires transformables en équations linéaires. Je présume même que cette propriété appartient à toute équation non-linéaire aux coefficients fonctions entières par rapport à la variable dépendante et ses dérivées.

26. Pour donner un exemple de la théorie que je viens d'exposer, soit

$$y'''-\frac{6}{x^2}y''+\frac{12}{x^3}y=0$$

la proposée.

Les coefficients sont choisis en sorte que l'on ait

$$X_1X_1''-\frac{1}{2}X_1'^2-3X_1X'+\frac{2}{3}X_1^3+\frac{9}{2}X^2=0,$$

et, par conséquent, $p=0$.

La formule

$$y_1=km^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{3}{8}\int\frac{u^2}{m}(X_1'-2X)dx}$$

donne

$$y_1=x^2,$$

et la valeur de y

$$y=m^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{3}{8}\int\frac{u^2}{m}(X_1'-2X)dx}\left[c_3+\int u\left(c_2+c_1\int\frac{m^{\frac{3}{4}}}{u^2}\cdot e^{\frac{9}{8}\int\frac{u^2}{m}(X_1'-2X)dx}dx\right)dx\right]$$

donne

$$y = k_3 x^2 + k_1 x^3 + \frac{k_1}{x^2},$$

k_1, k_2 et k_3 étant les trois constantes d'intégration.

Il est à observer que l'équation en p peut toujours s'abaisser d'une unité, mais la propriété de fournir l'intégrale générale à l'aide d'une seule solution particulière n'existera plus dans la transformée.

En posant

$$p' - \frac{1}{2} p^2 = m_1$$

dans l'équation en p lors de $n = 3$, on trouve

$$\frac{1}{2}(X_1 - m_1)m_1'' + \frac{5}{4} m_1'^2 + (X_1' - \frac{9}{2} X)m_1' - \frac{2}{3} m_1^3$$

$$+ 2X_1 m_1^2 - \frac{m_1}{2}(3X_1^2 + 2X_1'' - 6X') + \frac{1}{2} X_1 X_1'' - \frac{1}{4} X_1'^2$$

$$- \frac{3}{2} X_1 X' + \frac{X_1^3}{3} + \frac{9}{4} X^2 = 0.$$

Et si l'on fait

$$m_1 - \frac{X_1}{2} = m_2,$$

on arrivera à

$$-m_2 m_2'' + \frac{5}{4} m_2'^2 + \frac{9}{4}(X_1' - 2X)m_2' - \frac{2}{3} m_2^3 + X_1 m_2^2$$

$$- \frac{3}{2} m_2(X_1'' - 2X') + \frac{9}{16}(X_1' - 2X)^2 = 0.$$

Dans les deux cas, après avoir trouvé une intégrale particulière de l'une des deux transformées, il restera à trouver une valeur particulière de p, propre à vérifier soit l'équation

$$p' - \frac{1}{2} p^2 = m_1,$$

soit celle-ci

$$p' - \frac{1}{2} p^2 - \frac{X_1}{2} = m_2.$$

27. J'ai dit que la valeur du facteur intégrant de l'equation du n-ième ordre est donnée par la formule (n° 21)

$$\mu = e^{-\int X_{n-1} dx} \cdot \frac{dD}{dy_r^{n-1}}$$

Il existe cependant une autre méthode pour trouver la valeur de μ comme fonction de la variable dépendante et de ses $n-1$ dérivées, et cette méthode, sous bien des rapports, présente de nombreux avantages. Je vais l'exposer en peu de mots en supposant l'équation donnée du 1-r ordre

$$M dx + N dy = 0,$$

M et N étant des fonctions quelconques des deux variables x et y.

On peut partager l'expression $Mdx+Ndy$ en plusieurs autres de la même forme,

$$M_1 dx + N_1 dy, \quad M_2 dx + N_2 dy, \ldots, \quad M_i dx + N_i dy,$$

mais tellement choisies que l'on ait d'abord

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_i,$$
$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_i,$$

et ensuite

$$\mu_1 (M_1 dx + N_1 dy) = du_1, \quad \mu_2 (M_2 dx + N_2 dy) = du_2, \ldots$$

$$\mu_i (M_i dx + N_i dy) = du_i.$$

Alors, comme les mêmes composantes auront aussi pour facteurs intégrants respectivement

$$\mu_1 f_1(u_1), \quad \mu_2 f_2(u_2), \quad \ldots \mu_i f_i(u_i),$$

il s'en suit que l'on aura la valeur de μ pourvu qne l'on vérifie la condition

$$\mu_1 f_1(u_1) = \mu_2 f_2(u_2) = \ldots = \mu_i f_i(u_i) = \mu,$$

où f_1, $f_2 \ldots f_i$ désignent des fonctions quelconques des variables u_1, $u_2, \ldots u_i$ respectivement.

28. Appliquons cette méthode a l'équation linéaire du 2-d ordre

$$y'' + X_1 y' + X y = 0.$$

Je lui donnerai la forme

$$e^{\int \alpha dx} \cdot \frac{d}{dx} e^{-\int \alpha dx} (y' - \beta y) + e^{\int \beta dx} \cdot \frac{d}{dx} e^{-\int \beta dx} (y' - \alpha y) = 0,$$

sachant que

$$\alpha = -\frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4X + 2X_1'}}{2}$$

$$\beta = -\frac{X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4X + 2X_1'}}{2}.$$

La composante

$$e^{\int \alpha dx} \cdot \frac{d}{dx} e^{-\int \alpha dx} (y' - \beta y)$$

a pour facteur intégrant

$$\mu_1 = e^{-\int \alpha dx},$$

et le facteur de l'autre est

$$\mu_2 = e^{-\int \beta dx};$$

en faisant donc

$$e^{-\int \alpha dx} (y' - \beta y) = u_1$$

$$e^{-\int \beta dx} (y' - \alpha y) = u_2,$$

il restera à vérifier la condition

$$\mu_1 f_1(u_1) = \mu_2 f_2(u_2) = \mu$$

pour arriver à $\mu(y'' + X_1 y' + Xy) =$ *dérivée exacte.*

Autre décomposition.

$$e^{\int \alpha dx} \frac{d}{dx} e^{-\int \alpha dx} (y' - \beta y) + m e^{\int \beta} \frac{d}{dx} e^{-\int \beta dx} (y' - \alpha y) = 0,$$

sachant que les fonctions α, β, m sont liées par les deux équations conditionnelles

$$\alpha+\beta=-X_1$$

$$\alpha\beta-\frac{(\beta'+m\alpha')}{m+1}=X.$$

On en tire successivement

$$\beta=-\alpha-X_1,$$

$$m=\frac{\alpha'-\alpha^2-\alpha X_1-X+X_1'}{\alpha'+\alpha^2+X_1\alpha+X}.$$

en sorte que α reste arbitraire, à condition de ne pas égaler β

On trouve actuellement

$$\mu_1=e^{-\int\alpha dx}, \quad \mu_2=\frac{e^{-\int\beta dx}}{m},$$

et, en faisant

$$e^{-\int\alpha dx}(y'-\beta y)=u_1$$

$$e^{-\int\beta dx}(y'-\alpha y)=u_2,$$

la condition à vérifier sera

$$\mu_1 f_1(u_1)=\mu_2 f_2(u_2)=\mu.$$

En prenant

$$f_1(u_1)=(u_1-k_1)^{n_1}(u_1-k_2)^{n_2}\dots(u_1-k_i)^{n_i},$$

on s'aperçoit que le facteur de la proposée peut être de la forme

$$\mu=e^{-a\int\alpha dx}(y'-\beta y-k_1 e^{\int\alpha dx})^{n_1}(y'-\beta y-k_2 e^{\int\alpha dx})^{n_2}\dots\dots$$

où a, k_1, k_2,..., n_1, n_2...sont des constantes.

Le théorème de Minding s'étend de cette manière aux équations linéaires, et, en le combinant avec notre proposition du n° 22, on arrivera peut-être à des résultats aussi importants qu'inattendus.

CHAPITRE V.

Méthode symboligne.

29. Parmi les méthodes générales d'intégrations il faut classer aussi la *méthode symbolique.* Traduite en langage ordinaire, elle s'énoncera de la manière suivante:

Transformer l'équation différentielle donnée de manière à ce qu'elle dérive de son intégrale par la différentiation combinée avec l'élimination de la constante au moyen d'un facteur.

Soit par exemple,

$$y'' + \frac{y'^2}{x} + \left[\frac{A}{x}y^2 + \left(2A + \frac{B}{x} - \frac{1}{x^2}\right)y + B\right]y' - \frac{Ay^3}{x^2} + \\ + \left(A' - \frac{B}{x^2}\right)y^2 + B'y = 0$$

la proposée, sachant que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad A' = \frac{dA}{dx}, \quad B' = \frac{dB}{dx};$$

A et B étant des fonctions quelconques de la variable indépendante x.

Nous écrirons D F (x, y) au lieu de $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y'$, de façon que le symbole D représentera toujours l'opération qui consiste à prendre la dérivée totale de la quantité qu'elle affectera. Alors, en vertu de cette notation, la proposée pourra prendre la forme suivante:

$$\left(D + \frac{xy' - y}{x^2}\right)(y + Ay^2 + By) = 0;$$

ce qui veut dire

$$D(y' + Ay^2 + By) + \left(\frac{xy' - y}{x^2}\right)(y' + Ay^2 + By) = 0.$$

On s'aperçoit immédiatement que notre équation du second ordre dérive de son intégrale première

$$y' + Ay^2 + By = ce^{\frac{x}{y}}$$

au moyen des deux opérations successives: la première est la prise de la dérivée totale de l'intégrale que l'on vient de trouver, et la seconde consiste à éliminer la constante c au moyen du facteur

$$\frac{xy' - y}{x^2}.$$

Suivant la notation ordinaire on aura donc

$$y'' + (2Ay + B)y' + A'y^2 + B'y = -ce^{\frac{y}{x}}\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right),$$

$$y'' + (2Ay + B)y' + A'y^2 + B'y + \left(\frac{xy' - y}{x^2}\right)(y' + Ay^2 + By) = 0.$$

30. Avant d'aller plus loin il ne sera pas inutile de définir la signification, la vraie portée et le degré de généralité de cette méthode, et pour cela nous reprendrons l'équation du 1-r ordre

$$Mdx + Ndy = 0,$$

M et N étant des fonctions quelconques des deux variables.

Supposer que cette équation est intégrable soit par la séparation des variables, soit par le moyen d'un facteur, c'est admettre qne la primitive peut toujours prendre la forme

$$F(x, y) = C,$$

sachant qne la constante arbitraire n'entre pas implicitement dans $F(x, y)$. Et comme il est loin d'être vrai que toute équation primitive puisse être résolue par rapport à C, il s'en suit que l'on suppose exécutée une opération qui n'est par toujours exécutable.

Si l'on suppose, au contraire, que la primitive est de la forme $F(x, y) = f(x, y, C)$, c'est-à-dire non-résolue par rapport à C, on ne fait aucune hypothèse. Donc la méthode générale d'intégration de $Mdx + Ndy = 0$ consisterait à transformer cette

équation de manière à ce qu'elle dérive de son intégrale par la différentiation combinée avec l'élimination de la constante.

La méthode symbolique ne suppose pas que la primitive soit toujours transformable en

$$F(x, y) = C,$$

donc elle est plus générale que les méthodes d'intégration par la séparation des variables et par le moyen d'un facteur, en supposant la proposée transformable en une différentielle exacte; mais on ne peut pas dire qu'elle ait toute la généralité voulue, car elle suppose que l'élimination s'effectue au moyen d'un facteur.

31. D'après ce qui précède on voit que, la proposée étant

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0,$$

pour l'intégrer par la méthode en question il s'agit d'abord de la transformer soit en un seul produit symbolique de la forme

$$(D+\alpha_1)(D+\alpha_2)\ldots(D+\alpha_n)f(x, y) = 0,$$

soit en une somme de produits semblables, puis d'interpréter ces expressions convenablement, de manière à en tirer la primitive, ou ne fût-ce que l'intégrale première.

La réduction de la proposée à la forme symbolique peut s'effectuer de différentes manières, mais il importe de distinguer ceux des procédés qui permettent de la réaliser sans tâtonnement. En voici deux.

1°. Soit

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre résolue par rapport à $\frac{d^n y}{dx^n}$.

On posera

$$y' = p_1, \quad y'' = p'_1 = p_2, \quad \ldots y^{(n-1)} = p'_{n-2} = p_{n-1},$$

$$p'_{n-1} = f(x, y, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}).$$

Multipliant ensuite chacune des $n-1$ premières équations par

une quantité indéterminée et ajoutant les résultats à la dernière, il viendra

$$p'_{n-1} + m_1 p'_{n-2} + m_2 p'_{n-3} + \ldots + m_{n-2} p'_1 + m_{n-1} y'$$

$$= f(x, y, p, \ldots p_{n-1}) + m_1 p_{n-1} + m_2 p_{n-2} + \ldots + m_{n-2} p_2 + m_{n-1} p_1.$$

Ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d}{dx}\left[p_{n-1} + m_1 p_{n-2} + m_2 p_{n-3} + \ldots + m_{n-2} p_1 + m_{n-1} y\right]$$

$$= f(x, y, \ldots p_{n-1}) + m_1 p_{n-1} + p_{n-2}(m'_1 + m_2) \ldots + (m'_{n-3} + m_{n-2}) p_2$$

$$+ (m'_{n-2} + m_{n-1}) p_1 + m'_{n-1} y.$$

Restituant les valeurs de p_1, p_2, .. etc, on s'aperçoit que l'expression

$$\frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)} + m_1 y^{(n-2)} + m_2 y^{(n-3)} + \ldots + m_{n-2} y' + m_{n-1} y\right]$$

$$= f(x, y, \ldots y^{n-1}) + m_1 \left[y^{(n-1)} + \frac{(m'_1 + m_2)}{m_1} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{m'_{n-1}}{m_1} y\right]$$

peut s'écrire symboliquement comme il suit:

$$(D - m_1)\left(y^{(n-1)} + m_1 y^{(n-2)} + m_2 y^{(n-3)} + \ldots + m_{n-2} y' + m_{n-1} y\right)$$

$$= f(x, y^{n-1}).$$

Pour cela il faut seulement vérifier les conditions

$$m'_1 + m_2 = m_1^2, \ldots . m'_{n-1} = m_1 m_{n-1}.$$

Appliquant la même méthode aux expressions

$$y^{(n-1)} + m_1 y^{(n-2)} + \ldots + m_{n-1} y,$$

$$f(x, y, \ldots y^{(n-1)}),$$

on arrivera à la décomposition requise.

2°. On peut choisir arbitrairement une expression symbolique quelconque, passer ensuite à l'expression ordinaire pour comparer les coefficients de l'équation ainsi trouvée avec ceux de la proposée, comme dans l'exemple suivant.

Soit $$(y+X_1)y' + X_2y^2 + X_3y + X_4 = 0$$

la proposée, X_1, X_2, X_3, X_4 étant des fonctions de x données, et supposons que

$$(D - \alpha) f(x,y) + (D - \beta)(Ay + B) = 0$$

soit l'expression cherchée, sachant d'ailleurs que α, β, A, B sont des fonctions de x, et $f(x, y)$ une fonction indéterminée des deux variables.

Or, puisque

$$(D - \alpha) f(x, y) = \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dx} - \alpha f,$$

$$(D - \beta)(Ay + B) = Ay' + A'y + B' - \beta(Ay + B),$$

on a

$$y' \left(\frac{df}{dy} + A \right) + \frac{df}{dx} - \alpha f + (A' - A\beta)y + B' - B\beta.$$

Donc

$$\frac{df}{dy} + A = y + X_1$$

$$\frac{df}{dx} - \alpha f + y(A' - A\beta) + B' - B\beta = X_2y^2 + X_3y + X_4.$$

On tire de la première

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} + (X_1 - A)y + P,$$

P étant une fonction arbitraire de x. En faisant $P = -B$, nous aurons

$$\frac{df}{dx} = (X'_1 - A')y - B',$$

et par conséquent

$$X'_1 - \frac{\alpha}{2} y^2 - \alpha(X_1 - A)y + \alpha B - A\beta y - B\beta = X_2y^2 + X_3y + X_4.$$

Comparant les coefficients, il vient

$$\alpha = -2X_2$$

$$A(\beta + 2X_2) = 2X_1X_2 + X'_1 - X_3$$

$$B(2X_2 + \beta) = -X_4.$$

Je ferai $\beta = -2X_2 - 1$, ce qui donnera

$$A = X_3 - 2X_1X_2 - X'_1, \quad B = X_4;$$

par suite l'expression requise sera

$$(D+2X_2)\left(\frac{y^2}{2} + (X_1 - A)y - B\right) + (D+2X_2+1)(Ay+B) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(D+2X_2)\left(\frac{y^2}{2} + X_1 y\right) + Ay + X_4 = 0.$$

On s'aperçoit immédiatement que si l'on a $A = 0$, donc

$$X_3 - 2X_1X_2 - X'_1 = 0,$$

l'intégrale générale sera

$$\frac{y^2}{2} + X_1 y = e^{-2\int X_2 dx}\left[c - \int e^{2\int X_2 dx} X_4 dx\right].$$

32. Cherchons maintenant l'interprétation du produit symbolique

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\ldots(D - \alpha_n) f(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ désignant une fonction quelconque des deux variables, et on pourait même la remplacer par

$$F(x, y, y', y'' \ldots.);$$

quant à α_1, α_2.. α_n nous supposerons qu'elles représentent des fonctions quelconques de la seule variable x.

Faisons

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_3)\ldots(D - \alpha_n) f(x, y) = V,$$

donc

$$(D - \alpha_1)V = 0.$$

On tire de cette dernière

$$V = c_1 e^{\int \alpha_1 dx}.$$

Faisons ensuite

$$(D-\alpha_3)\ldots(D-\alpha_n)f(x,\ y)=V_1,$$

il viendra

$$(D-\alpha_2)V_1=c_1e^{\int\alpha_1 dx}.$$

D'où

$$V_1=e^{\int\alpha_2 dx}\left[c_2+c_1\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}dx\right].$$

Posons encore

$$(D-\alpha_4)\ldots(D-\alpha_n)f(x,\ y)=V_2;$$

nous aurons

$$(D-\alpha_3)V_2=e^{\int\alpha_2 dx}\left[c_2+c_1\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}dx\right].$$

D'où

$$V_2=e^{\int\alpha_3 dx}\left\{c_3+\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}\left[c_2+c_1\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}dx\right]dx\right\}.$$

On en conclut que la valeur de $f(x,\ y)$ est

$$f(x,\ y)=c_1e^{\int\alpha_n dx}\int e^{\int(\alpha_{n-1}-\alpha_n)dx}\ldots\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}dx^{n-1},$$

chaque signe d'intégration introduisant une nouvelle constante arbitraire.

33. Il est visible que l'hypothèse $f(x,\ y)=y$ réduit notre produit symbolique à l'expression symbolique de l'équation linéaire du n-ième ordre. Pour fixer les idées, je prendrai $n=3$ et

$$y'''+X_2y''+X_1y'+Xy=0\ldots\ldots\ldots\ldots(D)$$

pour l'équation donnée.

Pour obtenir cette équation par la différentiation combinée avec l'élimination des constantes, soit V une fonction de x qui comprenne en elle deux de ces constantes, et α_i une fonction de

x indéterminée: je supposerai que (D) dérive de l'équation du premier ordre

$$y' + \alpha_1 y = V, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d_1)$$

et pour légitimer cette supposition je prendrai d'abord deux fois de suite la dérivée de cette équation,

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha'_1 y = V'$$
$$y''' + \alpha_1 y'' + 2\alpha'_1 y' + \alpha_1'' y = V'';$$

ajoutant ensuite ces trois équations après avoir multiplié la première par un facteur indéterminé m_1, et la seconde par un autre facteur m_2, il viendra

$$y''' + (\alpha_1 + m_2) y'' + (2\alpha'_1 + \alpha_1 m_2 + m_1) y' + (\alpha_1'' + m_2 \alpha'_1 + m_1 \alpha_1) y$$
$$= V'' + m_2 V' + m_1 V.$$

Admettant enfin que les constantes soient éliminées, en sorte que l'on ait en même temps

$$y''' + (\alpha_1 + m_2) y'' + (2\alpha'_1 + \alpha_1 m_2 + m_1) y' + (\alpha_1'' + m_2 \alpha'_1 + m_1 \alpha) y = 0 \ldots (d_2)$$
$$V'' + m_2 V' + m_1 V = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d_3)$$

notre équation (D) se trouvera reproduite si l'on vérifie les trois conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 + m_2 = X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &2\alpha'_1 + \alpha_1 m_2 + m_1 = X_1 \ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1'' + m_2 \alpha'_1 + m_1 \alpha_1 = X \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Le développement symbolique de (D) est donc

$$D^2(D + \alpha_1) y + m_2 D(D + \alpha_1) y + m_1 (D + \alpha_1) y = 0,$$

et celui de l'équation en V

$$D^2 V + m_2 DV + m_1 V = 0.$$

34. On peut procéder aussi de la manière suivante:

Multipliant par un facteur indéterminé α_2 l'équation

$$y' + \alpha_1 y = V$$

et ajoutant le résultat à la dérivée

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha'_1 y = V',$$

on trouve

$$y'' + (\alpha_1 + \alpha_2) y' + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha'_1) y = V' + \alpha_2 V.$$

Multipliant cette dernière par un autre facteur α_3 et ajoutant à la dérivée

$$y''' + (\alpha_1 + \alpha_3)y'' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1)y' + \left(\frac{d\alpha_1\alpha_2}{dx} + \alpha_1''\right)y$$
$$= V'' + \alpha_2 V' + \alpha'_2 V,$$

il vient

$$y''' + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)y'' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1)y'$$
$$+ \left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha'_1 + \frac{d\alpha_1\alpha_2}{dx} + \alpha_1''\right)y = V'' + (\alpha_2 + \alpha_3)V' + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2')V.$$

Et si l'on vérifie les conditions

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = X_2$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1 = X_1$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha'_1 + \frac{d\alpha_1\alpha_2}{dx} + \alpha_1'' = X,$$

la proposée sera reproduite par

$$y''' + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)y'' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1)y'$$
$$+ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha'_1 + \frac{d\alpha_1\alpha_2}{dx} + \alpha_1'')y = 0.$$

De plus il est visible qu'elle contiendra aussi les deux intégrales particulières de l'équation

$$V'' + (\alpha_2 + \alpha_3)V' + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2)V = 0.$$

La comparaison de ces deux équations avec (d_2) et (d_3) respectivement fournit les relations

$$m_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad m_1 = \alpha'_2 + \alpha_2\alpha_3.$$

D'où il suit que le trinôme symbolique

$$D^2(D + \alpha_1)y + m_2D(D + \alpha_1)y + m_1(D + \alpha_1)y = 0$$

se ramène au monôme

$$(D + \alpha_3)(D + \alpha_2)(D + \alpha_1)y = 0$$

et toutes les deux formes fournissent la solution commune

$$y = c_3 e^{-\int \alpha_1 dx} + c_2 e^{-\int \alpha_1 dx} \int e^{\int (\alpha_1 - \alpha_2)\, dx} dx +$$

$$+ c_1 e^{-\int \alpha_1 dx} \int e^{\int (\alpha_1 - \alpha_2) dx} \int e^{\int \alpha_2 - \alpha_3) dx} dx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (S).$$

35. Je supposerai comme précédemment $X_2 = 0$, ce qui changera nos équations en celles-ci:

$$(1)\ldots\ y''' + X_1 y' + Xy = 0$$

$$(2)\ldots\ y''' + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) y'' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1) y' + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1' + \alpha_1'\alpha_2 + \alpha_2'\alpha_1 + \alpha_1'')\, y = 0$$

$$(3)\ldots\ V'' + (\alpha_2 + \alpha_3) V' + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2') V = 0$$

$$(4)\ldots\ (D + \alpha_3)(D + \alpha_2)(D + \alpha_1) y = 0$$

$$(5)\ldots\ (D + \alpha_3)(D + \alpha_2) V = 0$$

$$(6)\ldots \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha'_2 + 2\alpha'_1 = X_1 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha'_1 + \alpha'_1\alpha_2 + \alpha'_2\alpha_1 + \alpha''_1 = X. \end{cases}$$

L'analogie qui existe entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires devient ainsi presque évidente.

On voit d'abord que $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ sont les trois *racines* de l'équation symbolique (4), et elle se change en

$$(m + \alpha_3)(m + \alpha_2)(m + \alpha_1) = 0,$$

lorsque la proposée est aux coefficients constants, en vertu de la formule connue.

$$f(D) e^{mx} = f(m) e^{mx},$$

m étant une constante

On remarque ensuite que, les coefficients de la proposée étant variables, le changement de y en $e^{\int m dx}$, m étant une fonction de x, transformera (4) en

$$(D + \alpha_3)(D + \alpha_2)(D + \alpha_1) e^{\int m dx} = 0$$

d'abord, et on

$$(D+m+\alpha_3)(D+m+\alpha_2)(m+\alpha_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

ensuite, car pour m constante on a

$$f(D)e^{mx}y=e^{mx}f(D+m)y,$$

et pour m variable

$$f(D)e^{\int mdx}y=e^{\int mdx}f(D+m)\,y;$$

si donc $y=1$, il vient

$$f(D)e^{\int mdx}=e^{\int mdx}f(D+m).$$

La transformée (7) n'est plus linéaire, mais elle est satisfaite par la valeur $m=-\alpha_1$.

Enfin la notation symbolique met en évidence plusieurs autres propriétés que je vais indiquer successivement.

36. Le théorème de Libri démontré par Liouville devient évident. En effet, (2) contient en elle les deux intégrales de (3), et il en résulte une nouvelle équation

$$y'+\alpha_1 y=0$$

de degré $3-2=1$. Si au contraire cette dernière et (2) étaient données on trouverait (3). Mais cette même proposition peut être formulée d'une autre manière, et voici comment.

Supposons que simultanément avec (1) ait lieu l'équation linéaire

$$z''+A_1z'+A_2z=0$$

dont la forme symbolique est

$$(D+\beta)(D+\alpha_1)z=0,$$

en sorte que

$$\beta+\alpha_1=A_1, \quad \beta\alpha_1+\alpha'_1=A_2;$$

alors à l'aide du système (6) qui contient aussi α_1, on trouvera

$$\alpha_1(-X_1-A_1{}^2+A_2+A_1')=-A_1A_2+A'_2-X_1;$$

puis

$$\beta=A_1-\alpha_1,$$

et il ne restera qu'à trouver une intégrale particulière de l'équation $\alpha_2'-\alpha_2{}^2-\alpha_2\alpha_1+2\alpha'_1-\alpha_1{}^2=X_1$, la valeur de α_1 étant donnée par l'équation qui précède.

Ou, autrement:

L'équation

$$(D+\beta)(D+\alpha_1)z = 0$$

donne

$$(D+\alpha_1)z = c_1 e^{-\int \beta dx},$$

et, par conséquent,

$$(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)z = c_1(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)e^{-\int \beta dx},$$

ou

$$z''' + X_1 z' + Xz = c_1(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)e^{-\int \beta dx};$$

et simultanément

$$z'' + A_1 z' + Az = 0.$$

Éliminant z''' à l'aide de la dérivée

$$z''' + A_1 z'' + (A'_1 + A)z' + A'z = 0,$$

il vient

$$A_1 z'' + (A'_1 + A - X_1)z' + (A' - X)z = -c_1(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)e^{-\int \beta dx}.$$

Cette dernière étant retranchée de

$$A_1 z'' + A_1^2 z' + A_1 Az = 0$$

fournira

$$(A_1^2 - A'_1 - A + X_1)z' + z(A_1 A - A' + X) = c_1(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)e^{-\int \beta dx};$$

d'où l'on tire la valeur de z.

Le même procédé s'appliquera à l'équation en y.

37. Mais la plus importante de toutes les propriétés des équations linéaires est celle que nous avons déjà énoncée sous forme de proposition au n° 22.

Actuellement cette proposition s'énoncera de la manière suivante:

L'équation d'ordre n linéaire, étant écrite sous forme d'un produit symbolique

$$(D+\alpha_n)(D+\alpha_{n-1})\ldots(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y = 0,$$

pourra s'intégrer immédiatement n fois de suite, si la valeur d'une

seule des racines (symboliques) $-\alpha_2 \ldots -\alpha_n$ *est connue.* Ou, autrement: *On connaîtra les valeurs de toutes les fonctions désignées par* α_n, $\alpha_{n-1} \ldots \alpha_2$, *si la valeur d'une seule d'entre elles, excepté* α_1, *est donnée.*

La démonstration de cette proposition est basée sur les liaisons qui subsistent entre les α et les coefficients de la proposée. Cette dernière étant

$$y^{(n)}+X_{n-1}y^{(n-1)}+X_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+X_1y'+Xy=0\,;$$

on aura toujours

$$\Sigma\alpha_r=X_{n-1},\Sigma\alpha_r\alpha_i+\alpha'_{n-1}+2\alpha'_{n-2}+3\alpha'_{n-3}+\ldots+n\alpha'=X_{n-2}$$

et chacune des autres équations contiendra en elle les dérivées des mêmes quantités α_{n-1}, $\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1$: par suite les valeurs de toutes ces quantités, une seule excepté, se déduiront sans intégration.

Ainsi, pour $n=3$, on a (en posant $X_2=0$)

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha'_2+2\alpha'_1=X,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha'_1+\frac{d\alpha_1\alpha_2}{dx}+\alpha''_1=X\,.$$

On tire de la première

$$\alpha_3=-(\alpha_1+\alpha_2)$$

Substituant cette valeur de α_3 dans les deux autres équations on trouve

$$-(\alpha_1+\alpha_2)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha'_2+2\alpha'=X_1$$

$$-(\alpha_1\alpha_2+\alpha'_1)\,(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha'_1\alpha_2+\alpha_1\alpha'_2+\alpha''_1=X\,.$$

Et il est évident qu'à l'aide de la dérivée

$$-2(\alpha'_1+\alpha'_2)\,(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{d}{dx}\,(\alpha_1\alpha_2)+\alpha''_2+2\alpha''_1=X'_1$$

on peut éliminer α''_1 et α'_1.

On trouve en effet

$$2\alpha''_2+3\alpha_2\alpha_1{}^2+3\alpha_1\alpha_2{}^2-6\alpha_1\alpha'_2-3\alpha_2\alpha'_2-\alpha_2{}^3-\alpha_2X_1$$
$$+2(2X-X'_1)=0.$$

D'où l'on tirera la valeur de α_1 sans intégration. Donc, supposant α_2 connue, et il ne s'agit que d'uue valeur particulière de cette fonction, on aura les valeurs de α_1 et de α_3, et la solution générale sera (S) n^0 35.

Pour trouver l'équation en α_2 il faudrait substituer la valeur de α_1 dans

$$-(\alpha_1+\alpha_2)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha'_2+2\alpha'_1=X_1\ ;$$

mais il est préférable de procéder d'une autre manière.

Je poserai

$$\alpha_2=-2\alpha_1+q\ ,$$

q étant une fonction de x indéterminée.

Par suite

$$\alpha_3=\alpha_1-q\ ,$$

$$-q^2+3\alpha_1 q-3\alpha_1{}^2+q'=X_1\ .$$

$$\alpha''_1-3\alpha_1\alpha'_1-2\alpha_1{}^3+3\alpha_1{}^2q+\alpha_1(q'-q^2)-X=0\ ,$$

$$\alpha_1=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{3}(q'-\frac{q^2}{4}-X_1)}\ ,$$

$$\frac{q''}{2}\pm\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}-3\left|\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}\right|$$

$$\left|\frac{q'}{2}\pm\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}\right|$$

$$-2\left|\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}\right|^3+3q\left|\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}\right|^2$$

$$+(q'-q^2)\left|\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}-X_1\right)}\right|-X=0.$$

Cette équation est, comme on voit, du 3-me ordre non-linéaire; on pourrait donc croire que notre proposition ne diminue en rien les difficultés de l'intégration, et l'on se tromperait; c'est ce qu'il s'agit de prouver.

38. Considérons la valeur (S) de y, savoir

$$y=c_3e^{-\int\alpha_1 dx}+c_2e^{-\int\alpha_1 dx}\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)\frac{dx}{dx}}+c_1e^{-\int\alpha_1 dx}\int e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}$$

$$\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)\frac{dx}{dx}}\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (S)$$

et comparons-la à l'expression

$$y = c_3 y_1 + c_2 y_2 + c_1 y_3 ,$$

y_1 , y_2 , y_3 étant les trois intégrales particulières de la proposée

Rien n'empêche de poser

$$y_1 = e^{\int \alpha_1 dx} \quad , \quad y_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = e^{-\int \alpha_2 dx} \quad , \quad y_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_2}\right) = e^{\int \alpha_3 dx} ,$$

et si l'on admet ces valeurs, on aura au lieu de (S)

$$y = c_3 y_1 + c_2 y_1 + c_1 y_3 .$$

Supposons donc la proposée d'ordre n et deux de ces intégrales particulières, soit y_1 et y_2, *données: on connaîtra aussi l'intégrale générale de cette équation.*

Donc la difficulté de trouver $n-1$ choses inconnues (les $n-1$ intégrales particulières) se réduit à celle d'en trouver deux.

Ajoutons cependant que dans le cas général ce n'est pas la valeur de α_1 qui fournira la solution, car en éliminant α'_2 , par exemple on élimine en même temps α_2 . En effet les deux équations

$$-(\alpha_1+\alpha_2)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha'_2+2\alpha'_1 = X_1$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2+\alpha'_1)+\frac{d}{dx}\alpha_1\alpha_2+\alpha''_1 = X$$

peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\alpha'_2-\alpha_2{}^2-\alpha_1\alpha_2 = X_1+\alpha_1{}^2-2\alpha'_1$$

$$\alpha'_2-\alpha_2{}^2-\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}(X-\alpha''_1)+\alpha'_1 ;$$

et l'on voit que l'élimination de α'_2 fournirait

$$X_1\alpha_1+\alpha_1{}^3-3\alpha_1\alpha'_1+\alpha''_1-X=0 .$$

Cette dernière se ramène à

$$y_1'''+X_1y'_1+Xy_1=0 ,$$

si l'on substitue y_1 au lieu de $e^{-\int \alpha_1 dx}$, sachant que $y=y_1$ vérifie la proposée.

Donc, dans le cas général, *si l'on connait deux des n intégrales particulières, les valeurs des* $n-2$ *restantes se déduiront sans*

intégration, et l'on devra se servir pour cet effet des équations qui constituent les liaisons entre les coefficients $X_{n-1}\ldots X$ *et les racines symboliques* $\alpha_n\ldots\alpha_1$.

39. Jusqu'à présent nous avons fait dépendre le problème d'intégration de la possibilité de trouver les valeurs des $\alpha_n\ldots\alpha_1$; mais le problème inverse n'est pas non plus à négliger: on peut se proposer d'intégrer une équation symbolique dont toutes les racines soient connues.

Soit, par exemple,

$$y''+Xy=0$$

la proposée.

Au lieu de chercher la valeur de α_1 du monôme

$$(D+\alpha_2)\,(D+\alpha_1)y=0\,,$$

sachant que

$$\alpha_2+\alpha_1=0$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha'_1=X\,,$$

je prendrai en considération le binôme

$$(D+\beta)\,(D+\alpha)y+(D+\alpha)\,(D+\beta)\,y=0\,.$$

Et comme il doit reproduire la proposée, on aura

$$y''+(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta+\alpha')y$$
$$+y''+(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta+\beta')y=0\,,$$

$$y''+(\alpha+\beta)\,y'+\left|\,\alpha\beta+\frac{1}{2}\,(\alpha'+\beta')\,\right|\,y=0\,.$$

Donc

$$\alpha+\beta=0$$

$$\alpha\beta+\frac{1}{2}\,(\alpha'+\beta')=X\,,$$

ou

$$\alpha+\beta=0$$

$$\alpha\beta=X.$$

On en tire

$$\alpha=\sqrt{-X}\,,\quad \beta=-\sqrt{-X}\,.$$

L'équation symbolique devient

$$(D-\sqrt{-X})\,(D+\sqrt{-X})\,y+(D+\sqrt{-X})\,(D-\sqrt{-X})y=0.$$

Posons $(D+\alpha)y = u$,

u étant une nouvelle inconnue:

On aura

$$y = e^{-\int \alpha x} \int e^{\int \alpha dx} u\,dx ,$$

$$(D+\beta)y = (D+\beta)\, e^{-\int \alpha dx} \int e^{\int \alpha dx} u\,dx .$$

Donc

$$(D+\beta)u + (D+\alpha)(D+\beta)\, e^{-\int \alpha dx} \int e^{\int \alpha dx} u\,dx = 0,$$

ce qui se transforme en

$$(D+\beta-\alpha) e^{\int \alpha dx} u + D(D+\beta-\alpha) \int e^{\int \alpha dx} u\,dx = 0 .$$

Et si l'on fait

$$\int e^{\alpha dx} u\,dx = p ,$$

on aura

$$(D+\beta-\alpha)\, p' + D\,(D+\beta-\alpha)\, p = 0 ,$$

ou

$$2p'' + 2(\beta-\alpha)\, p' + p\,(\beta'-\alpha') = 0 .$$

Mais

$$\beta - \alpha = -2\sqrt{-X},$$

donc

$$p'' - 2p'\sqrt{-X} - p\frac{d}{dx}\sqrt{-X} = 0 :$$

Et si, pour simplifier, on remplace $-\sqrt{-X}$ par β, il viendra

$$p'' + 2p'\beta + p\beta' = 0 .$$

La forme symbolique de cette dernière est

$$D(D+\beta)p + (D+\beta)Dp = 0 .$$

40. On peut encore, à la faveur de la proposition du n^0 36, chercher la solution de la manière suivante.

La proposée étant

$$(D+\alpha_2)\,(D+\alpha_1)\, y = 0 ,$$

on changera y en $(D+\beta)\, u$,

β étant une fonction arbitrairement choisie et u une fonction inconnue: on aura de cette manière les deux équations

$$(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)\,y = 0$$
$$(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)(D+\beta)\,u = 0$$

qui ont deux facteurs commmuns.

Ou bien, multipliant la proposée par un nouveau produit symbolique

$$(D+\beta)(D+\beta_1)\ldots(D+\beta_i),$$

on obtiendra encore deux équations aux deux facteurs communs.

Ce procédé mérite que l'on s'y arrête; et il constitue même, à notre avis, une méthode aussi nouvelle qu'élégante; c'est pourquoi lui consacrons nous un chapitre à part.

41. Donnons quelques applications de la théorie exposée dans le chapitre présent.

Exemple 1. $y''' - \left(\frac{2b}{x} + \frac{b^2}{4}\right) y' + \frac{b}{x^2} y = 0$, b étant une constante quelconque.

L'équation symbolique donne $\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1 = 0$

$$\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)+\alpha_1\alpha_2+\alpha'_2+2\alpha'_1+\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{4}=0,$$

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha'_1+\alpha'_1\alpha_2+\alpha'_2\alpha_1+\alpha''_1=\frac{b}{x^2}.$$

Je ferai comme précédemment

$$\alpha_2 = -2\alpha_1+q,$$

ce qui donnera

$$\alpha_3 = \alpha_1 - q$$
$$-q^2+3\alpha_1 q+q'-3\alpha_1^2+\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{4}=0$$
$$\alpha''_1-3\alpha_1\alpha'_1-2\alpha_1^3+3\alpha_1^2 q+\alpha_1(q'-q^2)-\frac{b}{x^2}=0.$$

Posant pour abréger

$$\pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(q'-\frac{q^2}{4}+\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{4}\right)} = R,$$

il viendra $$\alpha_1 = \frac{q}{2} + R ,$$

$$\frac{q''}{2} - \frac{q'q}{4} - \frac{b}{x^2} + R'' - 3R'\left(\frac{q}{2} + R\right) - 2R^3 - \frac{R}{2}(q' - q^2) = 0 .$$

Mais

$$\frac{q''}{2} - \frac{qq'}{4} - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(q' - \frac{q^2}{4} + \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{3}{2}\frac{d}{dx}R^2 ,$$

donc une intégrale particulière de cette équation est $R = 0$.

On a donc

$$q' - \frac{q^2}{4} + \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{4} = 0 .$$

Équation qne l'on vérifie en faisant

$$q = -\frac{4}{x} - b .$$

Par suite

$$\alpha_1 = -\frac{2}{x} - \frac{b}{2} , \quad \alpha_2 = 0 , \quad \alpha_3 = \frac{2}{x} + \frac{b}{2} = -\alpha_1 ,$$

$$(D - \alpha_1)D(D + \alpha_1)\, y = 0 ,$$

$$y = c_3 e^{-\int \alpha_1 dx} + c_2 e^{-\int \alpha_1 dx} \int e^{\int \alpha_1 dx} dx + c_1 e^{-\int \alpha_1 dx} \int e^{\int \alpha_1 dx} dx \int e^{\int \alpha_1 dx} dx .$$

Ex. 2.— Soient

$$y''' - (7x^2 + 4)\, y' - (6x^3 + 15x)\, y = 0$$

$$z'' - 6xz' + (9x^2 - 3)\, z = 0$$

les deux équations qui ont un facteur commun, de façon que la première ayant pour expression symboliqne

$$(D + \alpha_3)(D + \alpha_2)(D + \alpha_1)\, y = 0 ,$$

celle de la dernière sera

$$(D + \beta)(D + \alpha_1)\, z = 0 .$$

En vertu des formules du n^0 36 on a

$$\beta = -6x - \alpha_1 , \quad \alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2) ,$$

$$\alpha_1 = -\frac{(12x^3+3x)}{4x^2+1} = -3x\,,$$

et l'intégrale particulière de l'équation

$$\alpha'_2 - \alpha^2_2 + 3x\alpha_2 - 6 - 9x^2 + 7x^2 + 4 = 0$$

est $$\alpha_2 = 2x.$$

Donc $$\beta = -3x, \quad \alpha_3 = x,$$

$$(D+x)(D+2x)(D-3x)y = 0$$

$$(D-3x)(D-3x)z = 0.$$

De la première

$$y = c_3 e^{\frac{3x^2}{2}} + c_2 e^{\frac{3x^2}{2}} \int e^{-\frac{5x^2}{2}} dx + c_1 e^{\frac{3x^2}{2}} \int e^{-\frac{5x^2}{2}} dx \int e^{\frac{x^2}{2}} dx,$$

et la dernière fournit

$$z = c_1 x + c_2 e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

42. Faisons encore une observation à l'égard de l'équation

$$(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y = 0.$$

Elle devient une dérivée exacte à l'aide du facteur $e^{\int \alpha_3 dx}$, car

$$e^{\int \alpha_3 dx}(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y = 0 \quad \text{est}$$

$$D(D+\alpha_2-\alpha_3)(D+\alpha_1-\alpha_3)ye^{\int \alpha_3 dx} = 0;$$

donc $$(D+\alpha_2-\alpha_3)(D+\alpha_1-\alpha_3)ye^{\int \alpha_3 dx} = c_1.$$

Celle-ci devient à son tour une dérivée exacte à l'aide du facteur $e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}$, car

$$e^{\int \alpha_2 - \alpha_3)dx}(D+\alpha_2-\alpha_3)(D+\alpha_1-\alpha_3)ye^{\int \alpha_3 dx} = c_1 e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}$$

se transforme en

$$D(D+\alpha_1-\alpha_2)e^{\int\alpha_2 dx}y = c_1 e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx};$$

donc

$$(D+\alpha_1-\alpha_2)e^{\int\alpha_2 dx}y = c_2 + c_1\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}dx.$$

Enfin

$$e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}(D+\alpha_1-\alpha_2)e^{\int\alpha_2 dx}y = c_2 e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx} + c_1 e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx}\int e^{\int(\alpha_2-\alpha_3)dx}dx$$

devient

$$De^{\int\alpha_1 dx}y = c_2 e^{\int(\alpha_1-\alpha_2)dx} + c_1 e^{\int\alpha_1-\alpha_2)dx}\int e^{(\alpha_2-\alpha_3)dx}dx,$$

et s'intègre immédiatement.

On peut donc énoncer les deux corollaires suivants:

1° Les valeurs des facteurs intégrants de la proposée ainsi que de ses intégrales successives jusqu'à la complète primitive exclusivement sont comprises dans la proposée elle-même.

2°. La proposée étant du n-ième ordre et lès facteurs intégrants des primitives étant μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_{n-1}$, respectivement, si l'on donne une valeur particulière soit du facteur μ de la proposée, soit de l'un des facteurs de la suite

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-2},$$

on trouvera l'intégrale générale, ou la compléte primitive de la proposée.

Ce dernier corollaire résulte de la proposition des n° 38 et 22.

43. Quant au cas particulier dans lequel les coefficients de l'équation linéaire sont de la forme

$$a+bx+\ldots\ldots$$

je n'en dirai que peu de mots. D'abord parce que ce sujet est fondamentalement traité dans d'autres ouvrages (voir l'ouvrage de M. G. Boole „Differential Equations"), et puis parce qu'il existe un procédé qui permet de traiter la question généralement. C'est ce procédé seul que je vais exposer.

Lorsque les coefficients de l'équation linéaire du n-ième ordre sont des fonctions entières relativement à la variable indépendante x, l'expression symbolique de cette équation devient

$$f_0(\mathrm{D})y+f_1(\mathrm{D})e^{\theta}y+f_2(\mathrm{D})e^{2\theta}y+\ldots=0,$$

par le changement de la variable indépendante en e^{θ}. Et si ces fonctions f_0, f_1, etc, sont telles qu'il soit possible de transformer cette équation en

$$\Phi_0(\mathrm{D})y+q_1\Phi_1(\mathrm{D})e^{\theta}y+\mu[\Phi_0(\mathrm{D})y+q_2\Phi_1(\mathrm{D})e^{\theta}y]$$
$$+\mu_1[\Phi_0(\mathrm{D})y+q_3\Phi_1(\mathrm{D})e^{\theta}y]+\ldots=0,$$

μ, μ_1 .. étant des fonctions quelconques des variables et du symbole D, toutes les solutions particulières se déduiront du système d'équations dont le terme général sera

$$\Phi_0(\mathrm{D})y-q_i\Phi_1(\mathrm{D})=0,$$

les q étant des constantes.

44. Voyons ce que devient cette proposition quand la variable indépendante reste x, et pour fixer les idées soit $n=2$, en sorte que la proposée est de la forme

$$y''+\mathrm{X}_1y'+\mathrm{X}y=0.$$

On a vu (n° 39) que pour ramener cette équation à la forme symbolique il s'agit de résoudre les équations simultanées

$$\alpha+\beta=\mathrm{X}_1$$
$$\alpha\beta+\beta'=\mathrm{X},$$

$-\alpha$,$-\beta$ étant les *racines* de l'équation

$$(\mathrm{D}+\alpha)(\mathrm{D}+\beta)y=0.$$

Et comme l'équation en β

$$\beta'-\beta^2+\mathrm{X}_1\beta=\mathrm{X}$$

est tout aussi difficile à résoudre que la proposée, j'ai donné la formule

$$(\mathrm{D}+\alpha)(\mathrm{D}+\beta)y+(\mathrm{D}+\beta)(\mathrm{D}+\alpha)y=0,$$

qui permet d'opérer la réduction sans intégration. En effet, cette formule donne

$$y''+(\alpha+\beta)y'+[\alpha\beta+\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')]y=0,$$

$$\alpha+\beta=X_1,\quad \alpha\beta+\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')=X,$$

donc
$$\alpha+\beta=X_1$$
$$\alpha\beta=X-\frac{1}{2}X_1'.$$

Mais il est visible que le nombre des formules de ce genre est incalculable; dès lors il est bon de choisir celles d'entre elles qui possèdent la propriété d'embrasser une classe plus ou moins nombreuse de ces équations.

Voici donc de quelle manière la proposition du n° précédent s'appliquera à l'équation du second ordre.

Considérons en premier lieu la forme suivante:

$$(D+p-m)(D+p+\frac{p'}{p})y+b(D+p-m)(D-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y$$
$$+c(D-m)(D-2m+\frac{p'}{p})e^{2\int mdx}y=0.$$

Les fonctions p, m sont tellement choisies, que quand on retourne à la forme ordinaire il vient

$$y''+X_1y'+Xy=0,$$

quant à b, c ce sont des constantes quelconques, mais données.

On voit que les deux premiers termes peuvent se présenter sous la forme

$$(D+p-m)\left[(D+p+\frac{p'}{p})y+q(D-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y\right]$$
$$+(b-q)(D+p-m)(D-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y\ ;$$

et ce dernier terme combiné avec le dernier de l'équation donne

$$(b-q)e^{\int mdx}\left[(D+p)(D+\frac{p'}{p})y+\frac{c}{b-q}D(D-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y\right].$$

Mais

$$(\mathrm{D}+p)(\mathrm{D}+\frac{p'}{p})y = \mathrm{D}(\mathrm{D}+p+\frac{p'}{p})y,$$

donc notre équation devient

$$(\mathrm{D}+p-m)\left[(\mathrm{D}+p+\frac{p'}{p})y+q(\mathrm{D}-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y\right]$$

$$+(b-q)e^{\int mdx}(\mathrm{D})\left[(\mathrm{D}+p+\frac{p'}{p})y+\frac{c}{b-q}(\mathrm{D}-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y\right]=0.$$

Et si l'on représente par q_1, q_2 les deux racines de l'équation

$$q=\frac{c}{b-q},$$

les deux solutions particulières de la proposée se déduiront des équations du premier ordre

$$(\mathrm{D}+p+\frac{p'}{p})y_1+q_1(\mathrm{D}-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y_1=0$$

$$(\mathrm{D}+p+\frac{p'}{p})y_2+q_2(\mathrm{D}-m+\frac{p'}{p})e^{\int mdx}y_2=0;$$

ou

$$y'_1(1+q_1e^{\int mdx})+y_1\left|p-q_1me^{\int mdx}+\frac{p'}{p}(1+q_1e^{\int mdx})\right|=0$$

$$y'_2(1+q_2e^{\int mdx})+y_2\left|p-q_2me^{\int mdx}+\frac{p'}{p}(1+q_2e^{\int mdx})\right|=0.$$

45. Considérons encore cette autre forme

$$(\mathrm{D}+\alpha)(\mathrm{D}+\alpha+m)y+b(\mathrm{D}+\alpha)(\mathrm{D}+\alpha+k)e^{\int mdx}y$$

$$+c(\mathrm{D}+\alpha+k)(\mathrm{D}+\alpha+k-m)e^{2\int mdx}y=0,$$

où α et m sont des fonctions, et b, c, k des constantes.

On en tire

$$(D+\alpha)\left[(D+\alpha+m)y+q(D+\alpha+k)e^{\int m dx}y\right]+$$

$$+(b-q)e^{\int m dx}\left[(D+\alpha+m)(D+\alpha+k+m)y\right.$$

$$\left.+\frac{c}{b-q}(D+\alpha+k+m)(D+\alpha+k)e^{\int m dx}y\right]=0.$$

Mais

$$(D+\alpha+m)(D+\alpha+k+m)=(D+\alpha+k+m)(D+\alpha+m),$$

donc, en désignant encore par q_1 et q_2 les deux racines de l'équation

$$q=\frac{c}{b-q},$$

on obtient les deux équations du 1-r ordre

$$(D+\alpha+m)y_1+q_1(D+\alpha+k)e^{\int m dx}y_1=0$$

$$(D+\alpha+m)y_2+q_2(D+\alpha+k)e^{\int m dx}y_2=0$$

qui fourniront les deux intégrales y_1 et y_2 de la proposée.

46. Exemple $(x^2+bx^3+cx^4)y''$

$$+(4x+2bx^2)y'+2y(1-bx)=0,$$

b et c étant des constantes données.

J'écrirai cette équation sous la forme suivante;

$$x^2(y''+\frac{4y'}{x}+\frac{2}{x^2}y)+x^3(y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y)+cx^4y''=0,$$

ou

$$y''+\frac{4}{x}y'+\frac{2}{x^2}y+bx(y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y)+cx^2y''=0.$$

Après cela, en me guidant de la formule

$$(D+\alpha)(D+\beta)y=y''+y'(\alpha+\beta)+y(\alpha\beta+\beta')$$

qui permet de passer de la forme ordinaire à la forme symbolique et réciproquement, je trouve

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y$$

$$bx\left(y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y\right) = bx\left(\mathrm{D} + \frac{3}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)y$$

$$cx^2y'' = cx^2\left(\mathrm{D} + \frac{1}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)y,$$

donc

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y + bx\left(\mathrm{D} + \frac{3}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)y + cx^2\left(\mathrm{D} + \frac{1}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)y = 0,$$

ou

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y + b\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy + c\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{3}{x}\right)x^2y = 0.$$

Et en désignant par q_1 et q_2 les deux racines de l'équation

$$\frac{c}{b+q} = -q,$$

j'aurai

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left[\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y - q\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy\right]$$

$$+ (b+q)x\left[\left(\mathrm{D} + \frac{3}{x}\right)\left(\mathrm{D} - \frac{1}{x}\right)y + \frac{c}{b+q}(\mathrm{D})\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy\right] = 0$$

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)\left[\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y - q\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy\right]$$

$$+ (b+q)x\left[\mathrm{D}\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y + \frac{c}{b+q}\mathrm{D}\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy\right] = 0,$$

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y_1 - q_1\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy_1 = 0$$

$$\left(\mathrm{D} + \frac{2}{x}\right)y_2 - q_2\left(\mathrm{D} - \frac{2}{x}\right)xy_2 = 0.$$

D'où $\quad y_1 = c_1\frac{(q_1x-1)^3}{x^2}, \qquad y_2 = c_2\frac{(q_2x-1)^3}{x^2},$

$$y = \frac{c_1(q_1x-1)^3+c_2(q_2x-1)^3}{x^2}$$

47. Il est visible qu'on pourrait multiplier le nombre des exemples en faisant tour à tour $m=\frac{1}{x}$, $m=\frac{k}{x}$, $m=\frac{1}{kx+k_1}$ $m=$ fonction entière de x, $m=$ fonction rationnelle de x, etc, et en attribuant aux autres lettres α, p, b, c des valeurs propres à reproduire des équations de la forme $Xy''+X_1y'+X_2y=0$.

Enfin si l'on s'arrête à la forme

$$(xD+a)(xD+b)y+(xD+a_1)(xD+b_1)x^ry=0,$$

a, b, a_1, b_1, r étant des constantes quelconques, on pourra permuter les facteurs, car

$$(xD+a)(xD+b)y=(xD+b)(xD+a)y,$$

et, par suite, on pourra aussi écrire

$$y+\frac{(xD+a_1)(xD+b_1)}{(xD+a)(xD+b)}x^ry=(xD+b)^{-1}(xD+a)^{-1}0.$$

Représentons par le symbole D_1 la double opération $x.D$ qui consiste à prendre la dérivée $\frac{d}{dx}$ et à multiplier ensuite par x, et démontrons que l'expression

$$y+f(D_1)x^ry=X,$$

X étant une fonction quelconque de x, peut être transformée en celle-ci:

$$u+\Phi(D_1)x^ru=P,$$

sachant que $\Phi(D_1)$ est une fonction arbitraire de D_1.

Posons pour cet effet

$$y=\varphi(D_1)u,$$

φ étant indéterminée; nous aurons d'abord

$$\varphi(D_1)u+f(D_1)x^r\varphi(D_1)u=X,$$

puis

$$\varphi(D_1)u+f(D_1)\varphi(D_1-r)x^ru=X,$$

et enfin

$$u+\frac{f(D_1)\varphi(D_1-r)}{\varphi(D_1)}x^ru=\varphi(D_1)^{-1}X.$$

Pour que cette dernière devienne

$$u+\Phi(D_1)x^r u = P,$$

on doit vérifier les conditions

$$\frac{f(D_1)\varphi(D_1-r)}{\varphi(D_1)} = \Phi(D_1), \qquad \varphi(D_1)^{-1}X = P.$$

On en tire

$$\varphi(D_1) = \frac{f(D_1)}{\Phi(D_1)}\varphi(D_1 - r),$$

$$\varphi(D_1 - r) = \frac{f(D_1-r)}{\Phi(D_1-r)}\varphi(D-2r),$$

. . . . . .

$$\varphi(D_1) = \frac{f(D_1)f(D_1-r)f(D_1-2r)\ldots.}{\Phi(D_1)\Phi(D_1-r)\Phi(D_1-2r)\ldots},$$

et l'on arrive de cette manière à la forme voulue

$$u+\Phi(D_1)x^r u = P.$$

CHAPITRE VI.

Méthodes pour trouver plusieurs intégrales du même ordre.

48. Soit $f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ l'équation donnée et

$$f_1(x, y, y', y'' \ldots . y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0$$

sa dérivée.

Si par un procédé quelconque on trouve une intégrale première de cette dérivée

$$\varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(n)}, c_1) = 0,$$

on pourra éliminer $y^{(n)}$ de la proposée et arriver ainsi à une intégrale première de

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Soient deux équations de la forme

$$\varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(n)}, c_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, y', \ldots y^{(n)}, c_2) = 0$$

qui aient lieu simultanément avec la proposée: on pourra éliminer $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ et arriver ainsi à une intégrale de second ordre.

En général, si l'on trouve r équations de la forme

$$\varphi_1(x, y, \ldots y^{(n)}, c_1)=0, \varphi_2(x, y, \ldots y^{(n)}, c_2)=0, \ldots \varphi_r(x, y, \ldots y^{(n)}, c_r)=0$$

qui aient lieu simultanément avec la proposée, on pourra éliminer r coefficients différentiels et arriver à l'intégrale d'ordre r.

L'ensemble des procédés qui ont pour but de trouver plusieurs équations du même ordre entre les mêmes variables, ou plusieurs intégrales du même ordre, constitue la méthode qui va être exposée dans ce chapitre.

49. On sait que de l'équation

$$y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = f(x+yy')$$

se déduisent

$$x+yy' = a, \quad y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = b,$$

et, par l'élimination,

$$y^2+(x-a)^2 = [f(a)]^2,$$

a étant la constante d'intégration.

Les cas de ce genre ne constituent pas de procédé d'intégration, aussi n'en dirons nous plus rien.

50. Je commencerai par donner une idée de deux procédés que j'ai traités ailleurs avec détails *); l'un d'eux appartient à M. Malmsten.

Proposition. — Soit μ le facteur intégrant de l'équation $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ que je représenterai pour abréger par $U = 0$, et μ_r le facteur propre à transformer la dérivée $U^{(r)} = 0$ d'ordre r de $U = 0$ en une nouvelle dérivée exacte du même ordre: je dis que *la dérivée $r^{ième}$ de μ_r, donc $\mu_r^{(r)}$, transformera en une dérivée exacte la proposée, de sorte que l'une des valeurs de μ sera* $\mu = \mu_r^{(r)}$.

---

*) Voir mon ouvrage publié en langue russe; il a pour titre „*Équations différentielles et aux différences*“ (1863, Moscou).

Démonstration. — Intégrant par parties le produit $\mu_r U^{(r)} dx$, il vient

$$\int \mu_r U^{(r)} dx = \mu_r U^{(r-1)} - \mu'_r U^{(r-2)} + \ldots$$
$$\ldots - (-1)^r \mu_r^{(r-1)} U + (-1)^r \int \mu_r^{(r)} U dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

D'où il suit que $\mu_r U^{(r)}$ étant une dérivée exacte, le produit $\mu_r^{(r)} U$ sous le signe $\int$ dans le second membre de cette égalité doit l'être aussi. En donnant à (1) la forme

$$\mu_r U^{(r)} = \frac{d}{dx}(\mu_r U^{(r-1)} - \mu'_r U^{(r-2)} + \ldots - (-1)^r \mu_r^{(r-1)} U) +$$
$$+ (-1)^r \mu_r^{(r)} U,$$

on rendra la proposition encore plus évidente.

51. Comme première application de cette proposition soit

$$y'' - 2x^{-2} y = 0$$

la proposée.

Les deux premières dérivées de $U = y'' - 2x^{-2} y$ sont

$$U' = y''' - 2x^{-2} y' + 4x^{-3} y, \quad U'' = y^{IV} - 2x^{-2} y'' + 8x^{-3} y' - 12x^{-4} y,$$

et le facteur intégrant de U'' est x^4; donc

$$\int x^4 (y^{IV} - 2x^{-2} y'' + 8x^{-3} y' - 12x^{-4} y) dx = x^4 (y''' - 2x^{-2} y' + 4x^{-3} y)$$
$$- 4x^3 (y'' - 2x^{-2} y) + 12 \int x^2 (y'' - 2x^{-2} y) dx,$$

et $x^2(y'' - 2x^{-2} y)$ doit être une dérivée exacte.

On trouve en effet

$$\int x^2 (y'' - 2x^{-2} y) dx = x^2 y' - 2xy + c,$$

c désignant la constante d'intégration.

Soit pour second exemple

$$x + yy' = a,$$

a étant une constante.

La dérivée $1 + y'^2 + yy'' = 0$ se transforme en une nouvelle dérivée exacte au moyen du facteur yy': en vertu de (1) $y'^2 + yy''$ est le facteur de la proposée. Dans tous les cas semblables où le facteur change l'ordre de la proposée on éliminera les dérivées de y du facteur à l'aide de la proposée et de ses derivées.

Actuellement on a

$$y'^2+yy''=-1$$

donc le facteur de la proposée est -1, c'est-à-dire qu'elle est immédiatement intégrable.

Soit encore

$$a_1+b_1x+c_1y+(a_2+b_2x+c_2y)y'=0.$$

La dérivée

$$b_1+(c_1+b_2)y'+c_2y'^2+(a_2+b_2x+c_2y)y''=0$$

se transforme en une nouvelle dérivée exacte par un facteur de la forme $(y'-\beta_1)^{m_1}(y'-\beta_2)^{m_2}(y'-\beta_2)^{m_3}$, β_1, β_2, β_3, m_1, m_2, m_3 étant des constantes, et la dérivée de ce facteur fera hausser l'ordre de la proposée. Par suite les dérivées y', y'' devront être éliminées à l'aide de la proposée et de la dérivée première.

52. Du reste il n'y a aucune nécessité d'intégrer la proposée du moment que le facteur de sa dérivée est connu. En effet, $U=0$ étant, comme précédemment, la proposée, si sa dérivée $U'=0$ se transforme en une nouvelle dérivée exacte du même ordre, soit $\int\mu_1U'dx=c$, il faudra simplement éliminer, entre cette dernière et $U=0$, la plus haute dérivée de y, par exemple $y^{(n)}$, l'ordre de la proposée étant n.

Ainsi, dans le dernier exemple du n^0 précédent, après avoir trouvé le facteur de la dérivée, il faudrait simplement intégrer pour éliminer ensuite y' au moyen de la proposée.

Exemple. $$\frac{y'}{Xy^2}+\frac{X_1}{X}+\frac{1}{y}=0.$$

C'est, comme on voit, une équation de la forme

$$Ny'+M=0.$$

Or, toutes les fois que $\frac{dM}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}:N$ seront indépendantes de y, le facteur de la dérivée sera

$$e^{\int\left(\frac{dM}{dy}\right)\frac{1}{N}dx},$$

et l'on aura simultanément avec la proposée l'équation

$$e^{\int \frac{dM}{dx}\cdot\frac{1}{N}\,dx}\cdot Ny' + \int e^{\int \frac{dM}{dy}\cdot\frac{1}{N}\,dx}\cdot\frac{dM}{dx}\,dx = C.$$

Actuellement ce facteur est

$$e^{-\int X dx},$$

donc

$$\frac{e^{-\int X dx}}{Xy^2}y' + \int\left[e^{-\int X dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X_1}{X}\right)\right]dx = C,$$

et, en éliminant y' à l'aide de la proposée,

$$e^{-\int X dx}\left(\frac{X_1}{X}+\frac{1}{y}\right) - \int\left[e^{-\int X dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X_1}{X}\right)\right]dx + C = 0.$$

Et l'intégration réussira encore toutes les fois que le facteur de la dérivée sera fonction d'une seule variable quelconque, c'est-à-dire soit de x, soit de y, soit de y', etc.

53. Je passe maintenant au procédé de M. Malmsten pour intégrer l'équation du 1-r ordre

$$\varphi(x, y, y') = a,$$

a étant une constante quelconque *).

Posons

$$\mu = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)}, \qquad \mu_1 = e^{\int dy\left[\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)}\right]};$$

d'après Malmsten les expressions

$$\mu(dy - y'dx), \quad \frac{\mu_1}{y'}(dy - y'dx)$$

seront des différentielles exactes, et on trouvera l'intégrale par l'élimination de y'.

*) A consulter le Journal de Liouville pour l'année 1863, mémoire de M. Malmsten.

Soit pour premier exemple

$$ydx - xdy = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y - xy' = 0.$$

On a $$\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad \frac{d\varphi}{dy'} = -x,$$

$$dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right) = -\frac{dx}{x},$$

de sorte que

$$\frac{1}{x}(dy - y'dx)$$

fournira la solution requise.

En effet, la proposée donne

$$y' = \frac{y}{x},$$

et change

$$\frac{1}{x}(dy - y'dx) \text{ en } \frac{1}{x}\left(dy - \frac{ydx}{x}\right);$$

mais

$$\int \frac{1}{x}\left(dy - \frac{ydx}{x}\right) = \frac{y}{x},$$

donc l'intégrale cherchée est

$$\frac{y}{x} = C.$$

Exemple. 2. $$y' + X_1 y + X = 0.$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = X_1, \quad \frac{d\varphi}{dy'} = 1,$$

donc

$$\mu = e^{\int X_1 dx}.$$

Substituant dans l'expression

$$e^{\int X_1 dx}(dy - y'dx)$$

la valeur de y' tirée de la proposée, on trouve

$$e^{\int X_1 dx} dy + X_1 y dx\, e^{\int X_1 dx} + X dx\, e^{\int X_1 dx},$$

donc

$$e^{\int X_1 dx} y + \int X e^{\int X_1 dx} dx = C$$

est l'intégrale cherchée.

Exemple 3. $xy'^2 + ayy' + bx = f(y')$.

Ici $$\frac{d\varphi}{dy} = ay', \quad \frac{d\varphi}{dy'} = 2xy' + ay - f'(y'),$$

donc il s'agit de trouver une transformation propre à rendre $dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)$ fonction d'une seule variable.

Pour cet effet on prend la dérivée de la proposée:

$$y'^2(1+a) + 2xy'y'' + ay + b - f'(y').y'' = 0.$$

On en tire

$$2xy' + ay - f(y') = -\frac{[y'^2(1+a)+b]}{y''}.$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{a}{2(1+a)} \cdot \frac{2(1+a)y'.y''}{b+(1+a)y'^2},$$

$$\mu = e^{\int dx \left[\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right]} = [b+(1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}},$$

et l'intégration dépend de la quadrature

$$\int [b+(1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}}.(dy - y'dx) = \textit{constante arbitraire}.$$

Intégrant par parties et prenant en considération la proposée, il vient

$$\text{const:} = [b+(1+a)y'^2]^{\frac{-a}{2(1+a)}}(y - xy')$$

$$+ \int [b+(1+a)y'^2]^{\frac{-a}{2(1+a)}-1}.f(y')dy',$$

ou $$[b+(1+a)y']^{-\frac{a}{2(1+a)}}.(y - xy') + F(y') = \text{const:}$$

Et il reste à éliminer y' à l'aide de la proposée.

Exemple 4. $ax+by+c+(a_1x+b_1y+c_1)y'=0.$

Actuellement

$$\frac{d\varphi}{dy}=b+b_1y',\ \frac{d\varphi}{dy'}=a_1x+b_1y+c_1,$$

d'où il suit qu'il est nécessaire de trouver une autre valeur de $\frac{d\varphi}{dy'}$, ce à quoi l'on parviendra en prenant la dérivée

$$a+(b+a_1)y'+b_1y'^2+(a_1x+b_1y+c_1)y''=0$$

pour en tirer

$$a_1x+b_1y+c_1=-\frac{[b_1y'^2+(a_1+b)y'+a]}{y''}.$$

Il viendra alors

$$\frac{d\varphi}{dy}:\frac{d\varphi}{dy'}=-\frac{(b+b_1y')}{b_1y'^2+(a_1+b)y'+a}.dy',$$

$$\mu=\frac{1}{(y'-\alpha)^m(y'-\beta)^n},$$

α, β, m et n étant des constantes.

On trouve l'intégrale déjà connue

$$(y-y_1)^{q_1}(y-y_2)^{q_2}=C.$$

54. Tous les procédés que l'on propose et que l'on pourrait proposer pour trouver la valeur du facteur intégrant ont ce défaut commun qu'ils rendent les calculs prolixes sans posséder la généralité voulue; d'ailleurs les équations intégrables à l'aide du facteur le sont aussi par des procédés plus directs. Il est même difficile de juger du degré de généralité que possèdent certaines formules, comme par exemple celles de Malmsten. On trouve, supposons, que la formule $\mu=e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy}:\frac{d\varphi}{dy'}\right)}$ ne donne pas la valeur du facteur: suivant la méthode on doit chercher s'il n'est pas possible de transformer cette formule à l'aide des dérivées de la proposée. Mais du moment qu'il s'agit de chercher sans avoir la certitude de trouver ou de ne pas trouver ce que l'on cherche, on ne voit pas pourquoi préférerait-on une formule quelconque à l'équation donnée elle-même.

Les deux procédés que je vais exposer offrent plus de généralité et moins d'incertitude, ils fournissent d'ailleurs les moyens de trouver dans bien des cas l'intégrale elle-même sans l'intermédiaire du facteur.

55. Considérons l'équation linéaire du 2-d ordre

$$y'' + X_1 y' + Xy = 0.$$

Si après avoir pris la dérivée de cette équation,

$$y''' + X_1 y'' + (X'_1 + X)y' + X'y = 0,$$

on pose

$$y' = p,$$

il viendra

$$p' = -X_1 p - Xy,$$
$$p'' = -X_1 p' - (X'_1 + X)p - X'y.$$

Multipliant la dernière par α, l'avant dernière par β, la première par γ, α, β, γ étant des facteurs indéterminés, et ajoutant les résultats, nous aurons

$$\alpha p'' + \beta p' + \gamma y' = -\alpha X_1 p' + p(\gamma - \beta X_1 - \alpha X_1' - \alpha X) - y(\beta X + \alpha X'),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d}{dx}[\alpha p' + \beta p + \gamma y] = (\alpha' - \alpha X_1)p' + (\beta' + \gamma - \beta X_1 - \alpha X'_1 - \alpha X)p + y(\gamma' - \beta X - \alpha X').$$

Si après cela on vérifie les conditions

$$\alpha' - \alpha X_1 = A\alpha$$
$$\beta' + \gamma - \beta X_1 - \alpha X_1' - \alpha X = A\beta$$
$$\gamma' - \beta X - \alpha X' = A\gamma,$$

il viendra

$$\alpha p' + \beta p + \gamma y = ce^{\int A dx},$$

ou

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = ce^{\int A dx}.$$

Éliminant y'' à l'aide de la proposée, nous aurons

$$(\beta - \alpha X_1)y' + (\gamma - \alpha X)y = ce^{\int A dx}.$$

D'où

$$y = e^{\int \frac{\alpha X - \gamma}{\beta - \alpha X_1} dx} \left[c_1 + c \int \frac{e^{\int \left(\frac{\alpha X - \gamma}{\alpha X_1 - \beta} + A \right) dx}}{\beta - \alpha X_1} dx \right].$$

Ce qui est l'intégrale générale de la proposée.

Tout dépend donc de la possibilité de trouver une solution particulière des trois équations conditionnelles.

On peut les écrire de la manière suivante:

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha e^{-\int (X_1 + A) dx} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\beta e^{-\int (X_1 + A) dx} \right) + \gamma e^{-\int (X_1 + A) dx} - \alpha (X'_1 + X) e^{-\int (X_1 + A) dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx} \right) - \alpha X' e^{-\int A dx} - \beta X e^{-\int A dx} = 0.$$

En vertu de la 1-re les deux dernières deviennent

$$\frac{d}{dx}\left(\beta e^{-\int (X_1 + A) dx} \right) + \gamma e^{-\int (X_1 + A) dx} - k (X'_1 + X) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx} \right) - k X' e^{\int X_1 dx} - \beta X e^{-\int A dx} = 0,$$

k étant une constante arbitraire qui résulte de l'intégration

$$\alpha e^{-\int (X_1 + A) dx} = k.$$

On trouve aussi

$$\beta X e^{-\int A dx} = + \frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx} \right) - k X' e^{\int X_1 dx}.$$

$$\beta e^{-\int (X_1 + A) dx} = + \frac{e^{-\int X_1 dx}}{X} \cdot \frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx} \right) - k \frac{X'}{X}.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\left(\beta e^{-\int (X_1+A)dx}\right) = +\frac{e^{-\int X_1 dx}}{X}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(X_1+\frac{X'}{X}\right)\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right) - Xk e^{+\int X_1 dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{X'}{X}\right)\right],$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right) - \left(X_1+\frac{X'}{X}\right)\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right) + X\gamma e^{-\int A dx} =$$

$$= kXe^{\int X_1 dx}\left(\frac{X''}{X} - \frac{X'^2}{X^2} + X'_1 + X\right).$$

Cette équation est satisfaite par la valeur

$$\gamma e^{-\int A dx} = kXe^{\int X_1 dx},$$

mais on ne peut pas se contenter de cette intégrale, attendu que l'équation $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = ce^{\int A dx}$ devient dans cette hypothèse

$$y'' + X_1 y' + Xy = \frac{ce^{-\int X_1 dx}}{k},$$

donc $c = 0$.

Cependant, bien qu'insignifiante, cette intégrale peut conduire à un grand nombre de cas nouveaux d'intégrabilité. Plus tard nous examinerons ces cas avec détails; pour le moment citons les deux suivants.

1°. En faisant $\gamma e^{-\int A dx} = Xe^{\int X_1 dx}$, sans attribuer à la constante k la valeur 1 on arrive à l'équation de condition

$$XX'' - X'^2 + X'_1 X^2 + X^3 = 0.$$

D'où il suit que l'équation

$$y'' + y'\left[k_1 - \int\left(\frac{X''}{X} - \frac{X'^2}{X^2} + X\right)dx\right] + Xy = 0$$

est intégrable.

2°. Posons $k=1$, $\gamma e^{-\int A dx} = X e^{\int X_1 dx} + \gamma_1$,

γ_1 étant une fonction de x qui remplacera γ: nous aurons après réduction

$$\gamma''_1 - \gamma'_1\left(X_1 + \frac{X'}{X}\right) + X\gamma_1 = 0.$$

Si donc on connaît quelques cas d'intégrabilité de l'équation donnée, ceux par exemple où

$$X = f(X_1),$$

on aura un nombre incalculable de cas nouveaux en tirant la valeur de X de l'équation

$$X = f\left(X_1 + \frac{X'}{X}\right).$$

56. L'autre procédé est dû à M. Bougaieff, professeur à l'université de Moscou.

Soit $$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

la proposée, et représentons les dérivées successives par

$$F_1(x, y, y', \ldots y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0$$
$$F_2(x, y, y', \ldots y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_r(x, y, y', \ldots y^{(n)}, \ldots y^{(n+r)}) = 0$$

respectivement. De ces $r+1$ équations éliminons soit r dérivées quelconques de y, soit la variable dépendante elle-même et $r-1$ des dérivées, y', y'', y''', ..., et pour fixer les idées supposons que le résultat de cette opération soit

$$f(y^{(n+r)}, y^{(n+r-1)}, \ldots x) = 0.$$

Cela posé, si par un moyen quelconque on parvient à trouver un nombre suffisant d'équations primitives de cette dernière pour éliminer les coefficients différentiels à l'aide de la proposée et de ses dérivées, on obtiendra une relation entre x, y avec n constantes arbitraires, c'est-à-dire la complète primitive de la proposée.

57. Soit, en premier lieu,

$$y' + f_1(x, y) = 0$$

l'équation dont il s'agit de trouver l'intégrale générale.

On prendra d'abord la dérivée

$$y'' + \frac{df_1}{dy}\,y' + \frac{df_1}{dx} = 0,$$

après quoi on éliminera y',

$$y'' - f_1 \cdot \frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dx} = 0.$$

Cela fait, supposons que l'on ait

$$f_1 \frac{df_1}{dy} - \frac{df_1}{dx} = \frac{dv}{dx},$$

v étant une fonction quelconque des variables données; il viendra

$$y' = v + c.$$

Éliminant y' de la proposée, nous aurons

$$v + f_1(x,\ y) + c = 0;$$

ce qui est l'intégrale cherchée.

58. Le meilleur usage que l'on puisse faire de ce procédé est celui de découvrir de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Soit donc

$$y'' + X_1 y' + Xy = 0$$

la proposée.

Si à l'aide de la dérivée

$$y''' + X_1 y'' + (X'_1 + X)y' + X'y = 0,$$

on élimine y', il viendra

$$X_1 y''' + (X_1{}^2 - X'_1 - X)y'' + y(X_1 X' - X^2 - XX'_1) = 0.$$

D'où l'on tire la condition

$$X_1 X' - X^2 - XX'_1 = 0,$$

$$X_1 = X(k - x).$$

Toutes les fois qu'elle se trouvera vérifiée, l'intégration s'achèvera de la manière suivante:

En vertu de la valeur $X_1 = X(k - x)$, l'équation

$$X_1 y''' + (X_1{}^2 - X'_1 - X)y'' = 0$$

deviendra

$$Xy''' + [X^2(k - x) - X']y'' = 0.$$

On en tire en intégrant

$$y'' = c_1 X e^{\int X(x-k)dx},$$

$$y' = c_2 + c_1 \int X e^{\int X(x-k)dx} dx.$$

Éliminant y' et y'' de la proposée il vient

$$c_1 X e^{\int (x-k)dx} + c_2 X_1 + c_1 X_1 \int X e^{\int X(x-k)dx} dx + Xy = 0,$$

ou

$$y = c_2(x-k) + c_1\left[(x-k)\int X e^{\int X(x-k)dx} dx - e^{\int X(x-k)dx}\right].$$

k est une constante quelconque, on peut même l'égaler à zéro, et c_1, c_2 sont les deux constantes d'intégration.

59. En suivant cette voie M. Bougaieff est parvenu à découvrir plusieurs classes d'équations de différents ordres réductibles aux quadratures. Ces cas d'intégrabilité sont non-seulement nouveaux, mais nous ignorons même s'il est possible de les résoudre par d'autres procédés. Le procédé en question constitue donc, à notre avis, une découverte importante, appelée, peut-être, à jouer un grand rôle dans cette branche de l'analyse qui s'occupe de l'intégration des équations différentielles et aux différences. Nous renvoyons le lecteur au mémoire qui traitera spécialement du dit procédé, en nous contentant seulement d'appliquer ce procédé à l'équation linéaire du 2-d ordre.

60. La question que j'ai cherchée à résoudre est celle-ci.

Étant donnée l'équation du 2-d ordre

$$y'' + X_1 y' + Xy = 0$$

trouver l'équation générale dont on puisse déduire toutes les équations linéaires du 2-d ordre intégrables par le procédé de M. Bougaïeff.

Voici comment je résous ce problème.

Changeant y en $u.\, e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}$ et posant pour abréger

$$P = X - \frac{1}{2}X'_1 - \frac{1}{4}X_1^2,$$

je ramène la proposée à la forme simple

$$u'' + Pu = 0,$$

après quoi je prends n fois de suite la dérivée de cette dernière, ce qui me donne

$$u'' + 0 + Pu = 0$$
$$u''' + 0 + Pu' + P'u = 0$$
$$u^{IV} + 0 + Pu'' + 2P'u' + P''u = 0$$
$$u^{V} + 0 + Pu''' + 3P'u'' + 3P''u' + P'''u = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u^{(n+2)} + 0 + Pu^{(n)} + nP'u^{(n-1)} + n\frac{(n-1)}{2}P''u^{(n-2)} + \ldots\ldots + P^{(n)}u = 0.$$

Éliminant ensuite u, u', u''.. $u^{(n-1)}$, et représentant, comme c'est reçu, par D_r le déterminant composé de r^2 éléments, j'arrive à l'équation suivante:

$$D_n u^{(n+2)} - D'_n u^{(n+1)} + D_{n+1} u^{(n)} = 0.$$

D'_n est la dérivée de D_n; quant à la valeur de ce déterminant, on devrait la déduire de l'expression symbolique

$$D_r = \begin{vmatrix} P, & 0, & 1, & 0, & 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P', & P, & 0, & 1, & 0, \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ P'', & 2P', & P, & 0, & 1, \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ P''', & 3P'', & 3P', & P, & 0. \ 1, \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ P^{(r-1)}, & (r-1)P^{(r-2)}, & \frac{(r-1)(r-2)}{2}P^{(r-3)} & \ldots\ldots & P \end{vmatrix}$$

Mais on peut aussi agir autrement.

En effet, si entre les équations

$$D_n u^{(n+2)} - D'_n u^{(n+1)} + D_{n+1} u^{(n)} = 0$$
$$D_n u^{(n+3)} + (-D''_n + D_{n+1}) u^{(n+1)} + D'_{n+1} u^{(n)} = 0$$

on élimine $u^{(n)}$, il viendra

$$D_{n+1} u^{(n+3)} - D'_{n+1} u^{(n+2)} + \left[-\frac{D''_n D_{n+1}}{D_n} + \frac{D^2_{n+1}}{D_n} + \frac{D'_n D'_{n+1}}{D_n} \right] u^{(n+1)} = 0.$$

D'où l'on tire la valeur de D_{n+2} en fonction de D_n et D_{n+1},

$$D_{n+2}=-\frac{D_n''D_{n+1}}{D_n}+\frac{D^2{}_{n+1}}{D_n}+\frac{D'_nD'_{n+1}}{D_n}.$$

Par suite

$$D_{n+1}=-\frac{D''_{n-1}.D_n}{D_{n-1}}+\frac{D^2{}_n}{D_{n-1}}+\frac{D'_nD'_{n+1}}{D_n},$$

et l'équation cherchée devient

$$D_nu^{(n+2)}-D'_nu^{(n+1)}+\left[-\frac{D''_{n-1}.D_n}{D_{n-1}}+\frac{D^2{}_n}{D_{n-1}}+\frac{D'_nD'_{n+1}}{D_n}\right]u^{(n)}=0.$$

On voit que pour trouver les valeurs des déterminants en fonction de P, P', P'', etc, il faudrait intégrer suivant la caractéristique Σ l'équation aux différences

$$D_nD_{n+2}+D''_nD_{n+1}-D^2{}_{n+1}-D'_nD'_{n+1}=0,$$

dans laquelle n est la variable indépendante et D_n la fonction de cette variable. A proprement parler cette équation est aux différences partielles mêlées, à deux variables indépendantes x et n, et à une fonction de ces variables D_n.

61. On remarque de suite deux cas particuliers dans lesquels l'intégration de la proposée s'achèvera.

1°. $D_{n+1}=0$.

Alors $u^{(n+1)}=c_1D_n$, $u^{(n)}=c_1\iint\ldots\int_{(n-1)}D_ndx^{n-1}$,

$$Pu+c_1\iint\ldots\int D_ndx^{n-1}=0.$$

2°. Si $D_n-D'_n+D_{n+1}=0$, on changera $u^{(n)}$ en $v^{(n)}.e^x$, v étant une nouvelle variable; le résultat de la substitution sera

$$D_nv^{(n+2)}+(2D_n-D'_n)v^{(n+1)}=0.$$

D'où

$$v^{n+1}=c_1D_ne^{-2x},\quad v^{(n)}=c_1\int e^{-2x}D_ndx,$$

$$u^{(n)}=c_1e^x\int e^{-2x}.D_ndx.$$

Soit, par exemple, $n=2$. On aura

$$D_2=P^2,\ D_3=P^3+2P'^2-PP'',$$

$$P_2u^{(IV)}-2PP'u'''+(P^3+2P'^2-PP'')u''=0.$$

Si donc $P^3+2P'^2-PP''=0$, il viendra $u=-\frac{1}{P}\left(c_2+c_1\int P^2dx\right)$, c'est-à-dire que $u=\frac{1}{P}$ sera une intégrale particulière de la transformée $u''+Pu=0$, et

$$y=\frac{1}{X-\frac{1}{2}X'_1-\frac{1}{4}X_1^2}$$

sera l'intégrale particulière de la proposée.

Soit pour dernier exemple

$$y''(x-x^3)+y'(a^2-b^2x^2)+y\left(x+\frac{a}{p}\right)p^2=0.$$

D'après le n° 58 on trouve

$$a^2-b^2x^2=(k-x)(xp^2+ap).$$

Cette condition sera remplie si l'on fait $k=\frac{a}{p}$; par conséquent l'intégrale de la proposée est

$$y=c_2\left(x-\frac{a}{p}\right)-c_1\frac{(x^2-1)^{\frac{a^2}{2}}}{x^{a^2}}+c_1\left(x-\frac{a}{p}\right)\int\frac{\left(x+\frac{a}{p}\right)}{x-x^3}p^2\frac{(x^2-1)^{\frac{a^2}{2}}}{x^{a^2}}dx.$$

62. La méthode que je viens d'exposer s'exprime très-simplement à l'aide de la notation symbolique. En effet, si l'on écrit au lieu de

$$u''+Pu=0$$

$$(D+\alpha)(D-\alpha)u+(D-\alpha)D+\alpha)u=0,$$

où α remplace $\sqrt{-P}$, le résultat de la double opération, qui consiste à différentier pour éliminer ensuite quelquesuns des éléments, u, u', u'', etc, s'exprimera de la manière suivante:

$$(D+P_1)(D+P_2)\ldots(D+P_n)\left\{(D+\alpha)(D-\alpha)u+(D-\alpha)(D+\alpha)u\right\}=0,$$

où P_1, $P_2 \ldots P_n$ sont des fonctions de x propres à réduire cette équation à la forme

$$(D+\beta)(D+\beta_1)u^{(n)}=0,$$

ou si l'on veut à celle-ci

$$(D+\beta)(D+\beta_1)u^{(n)}+(D+\beta_1)(D+\beta)u^{(n)}=0.$$

CHAPITRE VII.

Solutions particulières.

63. J'ai déjà dit ailleurs que l'état présent de l'analyse peut être défini par l'énoncé suivant:

Un problème étant proposé, on en connaîtra la solution générale si l'on en donne une ou plusieurs solutions particulières.

Cet énoncé se trouve déjà en partie justifié par la revue des méthodes générales d'intégration, et il le sera encore plus par ce qui va suivre. On a vu nommément que la solution générale d'une équation linéaire d'ordre quelconque dépend d'une seule intégrale particulière, et il est important de reconnaître que la marche progressive de l'analyse dépend avant tout et principalement du degré de développement de la théorie de cette classe d'équations.

En effet, il est visible que l'on ne connaîtra la solution de l'équation

$$F(x,\ y,\ y',\ldots y^{(n)})=0$$

avant que l'on ne trouve celle de l'équation du 1-r ordre

$$Ny'+M=0,$$

et cette dernière se simplifie lorsqu'on supppose M et N polynomes entiers en y. Mais, le degré de N étant zéro, si l'on suppose celui de M égal à 1, 2, 3,... successivement, on s'aper-

cevra sans peine que la première et la plus simple de toutes les équations que l'on ne sache pas intégrer est celle-ci:

$$y' + Ay^2 + By + P = 0,$$

A, B, P étant des fonctions de la seule variable x. Et comme cette dernière devient linéaire du 2-d ordre quand on remplace y par $\frac{u'}{Au}$, il s'en suit que l'analyse se trouve arrêtée principalement par les difficultés de trouver une solution particulière de l'équation linéaire du 2-d ordre

$$u'' + \left(B - \frac{A'}{A}\right)u + APu = 0.$$

C'est donc sur les équations linéaires en général et sur celle du 2-d ordre en particulier que l'attention des analystes doive se porter et se concentrer. C'est à cette équation que nous avons le plus souvent appliqué les méthodes générales d'intégration, c'est d'elle aussi qu'il sera question dans le présent chapitre.

64. On ne connaît qu'une seule méthode pour découvrir l'intégrale particulière en question: c'est la *substitution*. Il est très-probable que les procédés du dernier chapitre soient appelés à combler, avec le temps, la lacune qui existe dans cette partie de l'analyse; mais pour le moment nous n'y voyons qu'un instrument propre à augmenter le nombre des cas d'intégrabilité.

Substituer c'est remplacer les variables données par d'autres variables. Or, les formes des substitutions étant incalculables, on est porté naturellement à n'envisager cette méthode que comme un procédé de tâtonnement, et, il faut l'avouer, les cours d'analyse qui traîtent sur cette matière affermissent ce point de vue. On propose diverses formes de substitutions, mais on ne dit jamais pourquoi et comment le choix est-il tombé précisément sur les dites formes et non pas sur d'autres; on ne définit pas les principales propriétés des formes adoptés; on ne prouve pas que la forme choisie soit telle que pour s'assurer de l'existence de la solution requise à l'égard d'une autre équation il faille seulement lui appliquer la dite forme.

On démontre, par exemple, que l'équation

$$xy' - ay + by^2 = cx^m$$

est intégrable toutes les fois que la valeur de l'exposant n vérifie la condition

$$\frac{n \pm 2a}{2n} = \textit{nombre entier positif},$$

et la forme propre à fournir la solution est celle-ci

$$y = \alpha_1 + \frac{x^n}{y_1},\ y_1 = \alpha_2 + \frac{x^n}{y_2}, \ldots,$$

α_1, α_2... étant des constantes; mais rien ne nous dit que pour d'autres valeurs de n, non-comprises dans la formule $\frac{n \pm 2a}{2n} = i$, on ne puisse pas obtenir l'intégrale en prenant par exemple α_1, α_2... pour variables et en remplacant x^n dans la série par une fonction indéterminée. On est même porté à croire que, du moment que la solution dépend du nombre i de substitutions, il soit possible de trouver la solution de l'équation générale

$$y' + Ay^2 + By + P = 0.$$

En un mot il y a incertitude et tâtonnement.

M. Liouville a tâché de donner des éclaircissements au sujet de l'intégrale de l'équation

$$y'' = (ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots)y$$

mais ils sont loin d'être satisfaisants. D'ailleurs, supposer que la formule $\frac{n \pm 2a}{2n} = i$ embrasse tous les cas d'intégrabilité de l'équation

$$xy' - ay + by^2 = cx^n$$

c'est admettre que la série des transformations $y = \alpha_1 + \frac{x^n}{y_1}$, etc, possède toute la généralité voulue. Or, cette assertion étant évidemment inacceptable, il est clair encore qu'à l'égard de la méthode de substitution tout n'est qu'incertitude et tâtonnement.

65. Le premier but que je me propose dans ce chapitre est de débarasser l'analyse, autant que possible, du tâtonnement, en rendant à la méthode de substitution la précision et l'exactitude

mathématique qui lui manque. Pour cet effet je commencerai par énoncer quelques principes qui m'ont guidés dans mes recherches.

1-r Principe. — Une série de substitutions ne peut se présenter sous forme finie que si elle a une loi, c'est-à-dire un terme général; si donc on s'attend à obtenir la solution de l'équation donnée à l'aide d'un certain nombre r de substitutions, il est certain que y, c'est-à-dire la variable dépendante, doive être fonction de x et de l'indice, nombre entier r. D'où il suit que l'on doit rejeter toute substitution de la forme

$$y=\mathrm{F}(\alpha,\ \beta,\ \gamma.\ \ldots),$$

qui n'aurait aucune loi, à moins qu'on n'obtienne la solution cherchée en réduisant le nombre indéfini de variables α, β,.... à un *minimum* quelconque, soit deux, trois variables, par exemple à la forme simple

$$y=\alpha.\ \beta,\ \text{ ou } y=\frac{\alpha}{\beta},\ \text{ ou bien } y=\alpha+\beta.$$

On affirme, par exemple, que l'équation

$$y'+\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}y+\mathrm{P}=0$$

se résout à l'aide d'une substitution de la forme

$$y=\alpha.\beta.\gamma.\delta.\ldots\ldots:$$

je fais

$$\beta.\gamma.\delta.\ldots.=u,$$

et je ne vérifie que la substitution

$$y=\alpha.u;$$

si la solution ne s'obtient pas, j'en conclus, que le résultat sera le même quel que soit le nombre des fonctions que l'on introduira au lieu de u.

2-d Principe. — Du moment que y doit être fonction de l'indice, on aura à résoudre une ou plusieurs *équations aux différences partielles mêlées.* Toutefois il n'y a aucune nécessité de considérer tour à tour les équations que l'on puisse former en faisant varier les éléments de la substitution; si la nécessité existait, on ne pourrait jamais décider si l'intégrale de la forme

$y =$ *fonction finie explicite de* x est possible ou impossible. La question se simplifie par là qu'il suffit, dans l'état présent de l'analyse, de ne considérer qu'une seule forme de substitution, et nommément la plus simple. Elle est comprise dans la série suivante:

$$y = f_1 + \frac{m}{y_1},\ y_1 = f_2 + \frac{m}{y_2}, \ldots . y_{r-1} = f_r + \frac{m}{y_r};$$

m est une fonction de x seule, et f_r, y_r des fonctions de x et de l'indice r. Cette série conduit à des équations que l'on n'a pas encore analysées, et si on les trouve insolubles, à plus forte raison ne pourra-t-on pas résoudre les équations plus compliquées.

3-me Principe. — Une substitution de la forme

$$y = F(\theta_1,\ \theta_2 \ldots \theta_r),$$

ou, simplement,

$$y = \Phi(x,\ r),$$

n'est pas réductible au *minimum*, c'est-à-dire qu'il n'est pas permis de supposer

$$y = \Phi(x,\ 1),$$

ou

$$y = F(\theta_1),$$

car une fonction d'ordre r n'est pas toujours réductible à l'ordre 1. Et pour éviter tout malentendu je dois dire que j'appelle, avec Liouville, $y = e^{y_1}$ fonction exponentielle du 1-r ordre, $y = e^{y_1}$, $y_1 = e^{y_2}$ fonction du 2-d ordre, et, en général, $y =$ fonction exponentielle d'ordre i, si l'on a $y = e^{y_1}$, $y_1 = e^{y_2}$ $\ldots y_{i-1} = e^{y_i}$. Je dis donc que pour décider si l'équation du 2-d ordre

$$y'' = (ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots) y$$

est satisfaite par une valeur de la forme

$y =$ *fonction quelconque*, mais finie et explicite de x, *d'ordre* r,

il ne suffit pas de considérer la combinaison $r = 1$ seule; il est nécessaire, au contraire, de *former* d'abord les équations aux différences partielles mêlées (x et r étant les deux variables indépendantes), puis de résoudre ces équations.

Supposons, par exemple, que

$$y = F(\theta_1,\ \theta_2,\ .\ \theta_r)$$

représente la suite

$$y=f_1+\frac{m}{y_1},\quad y_1=f_2+\frac{m}{y_2},\ \ldots,\ y_{r-1}=f_r+\frac{m}{y_r},$$

et réduisons cette série au minimum

$$y=f_1+\frac{m}{y_1};$$

il viendra

$$-my'_1+(f'_1+Af_1^2+Bf_1+P)y_1^2+\left(\frac{m'}{m}+B+2Af_1\right)my_1+m^2A=0.$$

Et on ne voit pas quelle conclusion ou conséquence pourrait-on tirer de cette équation?

De même aussi, la proposée étant

$$y''=(ax^n+a_1x^{n-1}+\ldots)y,$$

il n'est pas, peut-être, impossible de décider si elle est satisfaite ou non par une intégrale de la forme

$$y=e^{\int u dx},$$

u étant une fonction algébrique; mais il est évident qu'il est impossible de procéder ainsi à tâtons pour résoudre la question relativement à la valeur

$$y=\Phi(x,\ r),$$

ou $y=$fonction expon: d'ordre r.

66. Ces principes admis, j'ai cherché à résoudre les questions suivantes:

1°. La proposée étant

$$y'+Ay^2+By+P=0. \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

décider si la valeur

$$y=\text{fonction finie explicite de } x$$

existe ou non?

2°. Si cette valeur existe, comment, à l'aide de quelles opérations pourrait-on la trouver?

J'admets comme une vérité évidente la proposition suivante:

Un problème est insoluble, dans l'état présent de l'analyse, *si*

sa nature reste invariable malgré les transformations qu'on lui applique; ou plus simplement, ***un problème irréductible est insoluble.*** Et, au contraire, ***la solution est possible si le problème est réductible ou susceptible de transformations.***

En particulier, si en cherchant une valeur $y = f(x)$ propre à vérifier l'équation proposée, on ne trouve aucune donnée pour déterminer cette valeur sans tâtonnement, il faudra en conclure l'un des deux: ou que cette solution n'existe pas, ou bien que, dans l'état présent de l'analyse, on ne saura la trouver.

67. Cela posé, je cherche d'abord la condition à laquelle doivent satisfaire les valeurs des coefficients A, B, P, pour que l'équation (I) devienne séparable.

Faisons $$y = u.v,$$

u et v étant deux fonctions de x; il viendra

$$v.u' + Au^2v^2 + (v' + Bv)u + P = 0.$$

Et si l'on a en même temps

$$Av^2 = P, \quad v' + Bv = kAv^2,$$

k étant une constante quelconque, l'équation deviendra

$$vu' + Av^2(u^2 + ku + 1) = 0.$$

D'où

$$\frac{du}{u^2 + ku + 1} + Avdx = 0.$$

L'une des deux équations détermine

$$v = \frac{e^{-\int B dx}}{c - k\int A e^{-\int B dx} dx},$$

après quoi l'autre donne

$$P = \frac{A.e^{-2\int B dx}}{\left(c - k\int A e^{-\int B dx} dx\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

ce qui est la condition cherchée.

68. Je choisis ensuite la série de substitution

$$y=f_1+\frac{m}{y_1},\quad y_1=f_2+\frac{m}{y_2},\ldots,\ y_{r-1}=f_r+\frac{m}{y_r},\ldots\ldots\ (\mathrm{III})$$

et je cherche s'il n'est pas possible d'attribuer aux fonctions arbitraires $m, f_1, f_2 \ldots f_r$ des valeurs propres à vérifier la formule (II). Je trouve

$$(-1)^r m^r y'_r + A_r y^2_r + \left(q_r \frac{m'}{m} + B + \right.$$

$$\left. + 2\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r}\right) m^r y_r + m^2 . A_{r-1} = 0, \ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{IV})$$

$$A_r = (-1)^{r-1} m^{r-1} f'_r + A_{r-1} f_r^2 + \left(q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + \right.$$

$$\left. + 2\Sigma \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}}\right) m^{r-1} f_r + m^2 . A_{r-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{V}).$$

On a ici $r=0, 1, \ldots, y_0=y, A_0=A,$

$$m^2 A_{-2}=0, \quad m^2 A_1 = P, \quad q_r = \frac{1-(-1)^r}{2},$$

$$\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r} = A_0 f_1 + \frac{A_1}{m} f_2 + \ldots + \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}}.$$

Appliquant la formule (II) à (III) on trouve

$$A_{r-1} m^2 = \frac{A_r m^{2q_r} . e^{2(-1)^{r+1} \int \left(B + 2\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r}\right) dx}}{\left[c - k(-1)^r \int A_r m^{q_r - r} . e^{(-1)^{r+1} \int \left(B + 2\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r}\right) dx} . dx\right]^2} \quad (\mathrm{II}_r)$$

Pour simplifier cette équation on peut faire $k=0$, $c=1$; il viendra alors

$$A_{r-1} m^2 = A_r m^{2q_r} . e^{2(-1)^{r+1} \int \left(B + 2\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r}\right) dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{II}'_r)$$

Supposons maintenant que l'intégration de (II'_r) suivant la caractéristique Σ et au moyen des intégrales définies nous fournisse la valeur de A_r: on fera

$$y_r = u_r . v_r$$

$$v_r = m^{q_r} \cdot e^{(-1)^{r+1}\int\left(B + 2\Sigma\frac{A_r f_{r+1}}{m^r}\right)dx},$$

et les variables se sépareront, en sorte que la valeur de u_r sera

$$u_r = \frac{c_1\beta e^{(-1)^{r+1}(\alpha-\beta)\int\frac{A_r v_r}{m^r}\,dx} - \alpha}{c_1 e^{(-1)^{r+1}(\alpha-\beta)\int\frac{A_r v_r}{m^r}\,dx} - 1},$$

c_1 étant la constante arbitraire et α, β les deux racines de l'équation

$$q^2 + 1 = 0.$$

D'où il suit que la valeur particulière $y = f(x)$ propre à vérifier (I) existe et que la recherche de cette valeur se ramène à l'intégration suivant la caractéristique Σ.

69. Tout ce qui vient d'être exposé dans les deux derniers *n*-os à l'égard de l'équation (I) se trouve dans mon ouvrage publié en 1863. Mais je ne voyais pas bien le parti que l'on pouvait tirer des formules (II_r), (II), (III), (IV) et (V). Tout récemment *) M. Letnikoff, mathématicien de Moscou, a trouvé que l'équation

$$y' + y^2 + By + \frac{e^{-2\int B\,dx}}{\left(c + \int e^{-\int B\,dx}\,dx\right)^{\frac{4i}{2i\pm 1}}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

qui est la généralisation de l'équation de Ricatti, peut se déduire de la série (III) en y faisant $m = 1$ et en déduisant la valeur de f_r de l'équation

$$(-1)^{r-1} f_r' + A_{r-1} f_r^{\,2} + \left(q_{r-1}\frac{m'}{m} + B + 2\Sigma\frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}}\right) m^{r-1} f_r = 0 \ldots (2)$$

Il n'a pas trouvé la valeur de f_r en fonction de x et de r, mais il a fait voir qu'il n'était pas impossible de la trouver par analogie, en faisant $r = 1$, 2, 3 et 4. Cette analogie est loin d'être évidente, et nous ne voyons d'autre moyen pour résoudre

*) A consulter le T. I du «Recueil mathématique» publié à Moscou en 1866.

la question que *d'intégrer* l'équation aux différences partielles mêlées (2) d'après les règles connues. On comprend qu'il ne s'agit pas de l'intégration de (1), il n'y a aucun doute qu'elle peut s'effectuer, attendu que d'autres équations, bien plus générales, s'intègrent aussi. En tirant, par exemple, de (II'_r) la valeur de A_r en fonction de A_{r-1} pour la substituer dans (IV), on trouvera une équation séparable pour toutes les valeurs de A_{r-1}, B, m, f_r, et cette équation comprendra en elle (1) comme cas particulier.

En écrivant encore l'équation

$$y''+(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta+\beta')y=0,$$

α et β étant arbitraires, on aura encore une équation intégrable dont (1) ne constituera qu'un cas particulier. Enfin nous prouverons dans la suite que les cas d'intégrabilité de (1) ne sont pas tous compris dans la formule $\frac{4i}{2i\pm 1}$. La vraie difficulté consiste seulement en ceci qu'il faut déduire la valeur de f_r propre à vérifier (2). Si cette question avait été décidée on pourrait immédiatement intégrer aussi les équations simultanées (IV), (V); car dans ce dernier, comme dans l'autre cas la solution dépend de l'intégration suivant la caractéristique Σ.

70. Pour donner une idée des opérations à l'aide desquelles on peut trouver l'intégrale de (I), je prendrai en considération la combinaison suivante:

$$f_r'=0,\quad A_{r-1}f_r^{\,2}+\left[q_{r-1}\frac{m'}{m}+B+2\Sigma\frac{A_{r-1}f_r}{m^{r-1}}\right]m^{r-1}f_r=0.$$

$$A_r=m^2A_{r-2}.$$

Cette dernière fournit

$$A_r=m^r[\alpha+(-1)^r.\beta],$$

α et β étant les deux fonctions arbitraires que l'on déterminera en attribuant à r une valeur initiale quelconque, soit $r=a$.

Je ferai $a=0$, ce qui donnera

$$A_0=\alpha+\beta,\ \text{puis}\ r=1$$

$$A_1=P=m(\alpha-\beta).$$

D'où

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(A + \frac{P}{m}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(A - \frac{P}{m}\right),$$

$$A_r = m^r \left[q_{r-1} A + q_r \cdot \frac{P}{m} \right], \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

q_r étant, comme précédemment,

$$\frac{1 - (-1)^r}{2}.$$

En vertu de cette valeur de A_r, l'équation

$$A_{r-1} f_r^2 + \left[q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}} \right] m^{r-1} \cdot f_r = 0$$

devient

$$\left(q_r A + q_{r-1} \cdot \frac{P}{m}\right) f_r + q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma f_r \left(q_r A + q_{r-1} \frac{P}{m}\right) = 0. \ldots (4)$$

La différence de cette dernière, dans l'hypothèse $\Delta r = 1$, est

$$\left(A q_{r+1} + q_r \frac{P}{m}\right) f_{r+1} + \left(A q_r + \frac{P}{m} q_{r-1}\right) f_r = (-1)^r \frac{m'}{m}.$$

Si on la multiplie par $(-1)^r$ elle deviendra la différence exacte de

$$(-1)^{r-1} \left(A q_r + q_{r-1} \frac{P}{m}\right) f_r = r \cdot \frac{m'}{m} + \gamma.$$

La fonction arbitraire γ se détermine d'après la condition $r = 1$

$$A f_1 = \frac{m'}{m} + \gamma,$$

attendu que (3) fournit dans cette hypothèse

$$A f_1 + B = 0, \quad f_1 = -\frac{B}{A}.$$

Partant

$$\gamma = -\frac{m'}{m} - B,$$

$$(-1)^{r-1} f_r \left(A q_r + q_{r-1} \frac{P}{m} \right) = (r-1) \frac{m'}{m} - B. \ldots\ldots (5)$$

On voit de plus que $\frac{B}{A}$ doit être indépendant de x, ce qui

sera vérifié dans (I), si l'on y change y en

$$\frac{w.e^{-\int B dx}}{k_1 - b\int \frac{-\int B dx}{A e \, dx}}.$$

Je vais maintenant trouver la valeur du terme

$$\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r} = A f_1 + \frac{A_1}{m} f_2 + \ldots + \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Pour cet effet changeons r en $r+1$ dans (5) multiplions ensuite les deux membres par $(-1)^r$, et intégrons; nous aurons

$$\Sigma f_{r+1}\left(A q_{r+1} + \frac{P}{m} q_r\right) = \frac{(-1)^{r+1}}{4}\left[(2r-1)\frac{m'}{m} - 2B\right] + \varphi(x).$$

On voit de plus que le second membre de (6) se réduit à $A f_1$, ou $-B$, quand on fait $r = 1$; par conséquent

$$-B = \frac{1}{4}\left(\frac{m'}{m} - 2B\right) + \varphi(x).$$

D'où $\varphi(x) = -\frac{B}{2} - \frac{1}{4}\frac{m'}{m}$ et la fonction arbitraire se trouve déterminée. Par suite aussi

$$\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r} = \frac{(-1)^{r+1}}{2}(r - q_r)\frac{m'}{m} - q_r B.$$

Substituant cette valeur dans l'équation qui détermine y_r, il vient, après réduction,

$$(-1)^r y'_r + \left(A q_{r+1} + q_r \frac{P}{m}\right) y^2_r + (-1)^{r+1}\left(r\frac{m'}{m} - B\right) + m\left[q_r A + q_{r-1}\frac{P}{m}\right] = 0.$$

C'est à cette équation que j'appliquerai la formule (II), après avoir fait

$$k = 0, \quad \frac{1}{c^2} = c_r. \text{ J'aurai}$$

$$A m q_r + P q_{r-1} = c_r\left(A q_{r+1} + q_r \frac{P}{m}\right) m^{2r} . e^{-2\int B dx} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Cette équation conjointement avec

$$(-1)^{r-1} f_r \left(A q_r + q_{r-1} \frac{P}{m} \right) = (r-1) \frac{m'}{m} - B. \quad \ldots\ldots (b)$$

détermineront les valeurs de f_r, P et m.

On voit que $r = 1$ donne

$$A = c_1 P e^{-2\int B dx},$$

ou bien, à cause de $f_1 = -\frac{B}{A}$,

$$A e^{-2 f_1 \int A dx} = c_1 P.$$

Faisant $r = 2$, il vient

$$P = c_2 A m^4 e^{-2\int B dx},$$

$$\frac{m'}{m} + f_2 \frac{P}{m} - B = 0.$$

D'où

$$m = e^{\int B dx} \left(k - f_2 \int P e^{-\int B dx} dx \right),$$

$$\frac{P}{A} e^{-2\int B dx} = c_2 \left(k - f_2 \int P e^{-\int B dx} dx \right)^4,$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{P}{A} \cdot e^{-2\int B dx} \right]^{\frac{1}{4}} = -f_2 c_2^{\frac{1}{4}} \cdot \int \frac{P}{A} e^{-2\int B dx} dx \Big) A e^{\int B dx},$$

$$P = \frac{A e^{2\int B dx}}{\left(k_1 - c'_2 e^{-f_1 \int A dx} \right)^{\frac{4}{3}}};$$

k, k_1 et c'_2 sont des constantes arbitraires.

Dans le cas général on trouve

$$\frac{A}{2(i-1)} (f_{2i-1} - f_1) = \frac{m'}{m} \quad \text{si } r = 2i - 1,$$

$$(2i-1)\frac{m'}{m}+Af_1+f_{2i}\frac{P}{m}=0 \quad \text{si } r=2i;$$

de plus

$$A=c_{2i-1}P.m^{4(i-1)}.e^{-2\int Bdx}, \text{ ou } P=c_{2i}.Am^{4i}.e^{-2\int Bdx},$$

selon que r sera impair ou pair.

L'équation $$\frac{A}{2(i-1)}(f_{2i-1}-f_1)=\frac{m'}{m}.$$

donne

$$m=e^{(f_{2i-1}-f_1)\int\frac{Adx}{2(i-1)}}.$$

On tire ensuite de

$$(2i-1)\frac{m'}{m}+Af_1+f_{2i}.\frac{P}{m}=0$$

$$\frac{2i-1}{2(i-1)}(f_{2i-1}-f_1)A+Af_1+f_{2i}Pe^{-(f_{2i-1}-f_1)\int\frac{Adx}{2(i-1)}}=0.$$

On vérifie cette équation soit en posant $f_{2i}=0$,

$$\frac{2i-1}{2(i-1)}(f_{2i-1}-f_1)+f_1=0,$$

soit en déterminant P.

Comme exemple prenons l'équation

$$y'+\frac{b}{x}y^2-\frac{a}{x}y-cx^{n+1}=0.$$

On a actuellement

$$\frac{2i}{b}x\frac{m'}{m}+f_1=f_{2i+1}, \quad \frac{2i-1}{b}x\frac{m'}{m}+f_1=f_{2i}.\frac{cx^{n+2}}{bm}.$$

Faisant $\frac{x}{b}.\frac{m'}{m}=\text{const.}=k_1$, on trouve

$$m=x^{bk_1}.$$

Ensuite $$(2i-1)k_1+f_1=\frac{c}{b}f_{2i}.x^{n+2-bk_1},$$

d'où dérivent les deux cas:

$$n+2 = bk_1, \quad f_{2i} = 0, \quad f_1 + k_1(2i-1) = 0$$

1-r cas. $$k_1 = \frac{n+2}{b}, \quad m = x^{n+2},$$

$$(2i-1)\frac{(n+2)}{b} + f_1 = \frac{c}{b} f_{2i}, \quad f_{2i+1} = f_1 + \frac{2i(n+2)}{b};$$

par suite

$$(r-1)(n+2) + a = f_r(bq_r - cq_{r+1}).$$

2-d cas. $$f_{2i} = 0, \quad k_1 = -\frac{f_1}{2i-1}, \quad m = x^{\frac{-a}{2i-1}},$$

$$f_{2i+1} = -\frac{f_1}{2i-1}.$$

Reprenant l'équation (a), il vient, pour r impair, $n+2 = -\frac{2a}{4i+1}$, et pour $r =$ nombre pair $n+2 = -\frac{2a}{4i-1}$.

De plus, lors de $f_{2i} = 0$, on trouve

$$n+2 = \pm\frac{2a}{2i-1}.$$

71. La combinaison que je viens d'analyser est certes d'une grande généralité; elle comprend toutes les généralisations de l'équation de Ricatti trouvées jusqu'à présent. Mais il ne faut pas croire que la formule $\frac{-4i}{2i \pm 1}$, soit dans l'équation de Ricatti, soit dans celle trouvée par M. Letnikoff, embrasse tous les cas d'intégrabilité, ou ceux dans lesquels la proposée se réduit aux quadratures. On trouvera d'autres conditions, d'autres cas d'intégrabilité, rien qu'en changeant la valeur initiale de r.

72. L'équation (I), bien que du 1-r ordre, est plus difficile à intégrer que l'équation linéaire du 2-d ordre

$$u'' + X_1 u' + Xu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I')$$

Cette dernière se ramène à (I) en faisant

$$X_1 = B - \frac{A'}{A}, \quad X = AP, \quad u = e^{\int A y dx}.$$

On *a* vu que pour découvrir l'intégrale particulière de (I) il faudrait intégrer suivant le signe Σ; actuellement le changement de la variable dépendante suivant la loi (III) ne mènerait à aucun résultat important. Mais il existe une autre substitution propre à découvrir l'intégrale particulière requise, et cette substitution abrège singulièrement les opérations. En outre, le changement de la variable indépendante dans (I) ne transformerait en rien le problème, tandis que le même changement appliqué à (I') serait capable de réduire l'intégration suivant le signe $\int$ à celle de Σ.

Jusqu'à présent on ne savait changer la variable indépendante que par tâtonnement, je vais montrer que ce changement peut s'opérer à l'aide d'une méthode rigoureuse.

73. Soit $(1-x^2)u''-xu'+au=0$ la proposée; on demande à l'intégrer à l'aide du changement de la variable indépendante.

Désignant par t la nouvelle variable, on *a*

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{du}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2};$$

par suite

$$(1-x^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2u}{dt^2}+\left[(1-x^2)\frac{d^2t}{dx}-x\frac{dt}{dx}\right]\frac{du}{dt}+au=0.$$

Cette équation deviendra de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}+au=0,$$

et aura pour intégrale

$$u=c_1e^{m_1t}+c_2e^{m_2t},$$

m_1 et m_2 étant les deux racines de $m^2+a=0$, si l'on vérifie les conditions

$$(1-x^2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=1,\quad (1-x^2)\frac{d^2t}{dx^2}-x\frac{dt}{dx}=0.$$

La première donne

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\quad t=\text{arc Cos } x,$$

et cette valeur de t vérifie aussi la seconde condition.

Dans le cas général on aurait

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{d^2t}{dx^2} + X_1\frac{dt}{dx}\right)\frac{du}{dt} + Xu = 0 \ldots\ldots (T)$$

et si l'on vérifie les conditions

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = X, \quad \frac{d^2t}{dx} + X_1\frac{dt}{dx} = a\left(\frac{dt}{dx}\right)^2,$$

il viendra

$$\frac{d^2u}{dl^2} + a\frac{du}{dt} + u = 0,$$

équation que l'on sait intégrer.

La dernière des deux conditions donne

$$\frac{dt}{dx} = \frac{e^{-\int X_1 dx}}{(c - a\int e^{-\int X_1 dx} dx)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = X$, il vient

$$X = \frac{e^{-2\int X_1 dx}}{(c - a\int e^{-\int X_1 dx} dx)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II');$$

ce qui n'est autre chose que la formule du n° 67.

L'équation (I') sera intégrable si l'on détermine t de manière à vérifier l'équation

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{d^2t}{dx} + X_1\frac{dt}{dx} + X = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (I'')$$

Mais cette dernière est de la forme (I), attendu qu'elle devient

$$w' + w^2 + X_1 w + X = 0$$

par le changement de $\frac{dt}{dx}$ en w, donc tout ce qui a été dit à l'égard de l'autre se rapporte aussi à (I''). C'est-à-dire qu'en changeant $\frac{dt}{dx}$ en

$$f_1+\frac{m}{w_1},\quad w_1 \text{ en } f_2+\frac{m}{w_2},\quad \text{etc,}$$

on obtiendra deux équations de la forme (IV) et (V), auxquelles on appliquera la formule (II') et toutes les fois que l'on pourra trouver la valeur de y dans (I), on pourra aussi trouver $\frac{dt}{dx}$.

La condition (I'') une fois vérifiée, on trouvera l'intégrale de (T) en changeant u en $u_1 . e^{t}$.

Enfin, il est possible de trouver d'autres formules pour les différents changements de la variable indépendante, et dans tous les autres cas on procédera comme dans ceux que je viens de considérer.

74. La combinaison la plus importante est celle où l'on se propose de déterminer la nouvelle variable indépendante t en sorte que (T) soit réductible à la forme symbolique

$$(D+\alpha)(D+\beta)u = 0, \quad \text{(VII)}$$

sachant que D remplace $\frac{d}{dt}$ et que α et β désignent deux fonctions de t. On sait (chapitre V), que l'intégrale de (VII) est

$$u = e^{-\int\beta dt}\left[c_1+c_2\int e^{\int(\beta-\alpha)dt}\right],$$

et que la forme ordinaire de (VII) est

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(\alpha+\beta)\frac{du}{dt}+\left(\alpha\beta+\frac{d\beta}{dt}\right)u = 0;$$

tout revient donc à vérifier les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta &= \frac{t''+X_1t'}{t'^2}\\ \alpha\beta+\frac{d\beta}{dt} &= \frac{X}{t'^2},\end{aligned}\right\}' \quad \text{(VIII)}$$

où $\quad t'=\frac{dt}{dx},\quad t''=\frac{d^2t}{dx^2}.$

Or, de la première des équations (VIII) on tire

$$\alpha = -\beta+\frac{t''+X_1t'}{t'^2}$$

et cette valeur de α étant substituée dans la seconde des équations (VIII) fournira

$$\frac{d\beta}{dt} - \beta^2 + \frac{\beta(t'' + X_1 t')}{t'^2} - \frac{X}{t'^2} = 0,$$

il s'agit donc d'appliquer à cette dernière équation la série (III).

75. Dans tous les cas considérés dans ce chapitre on retombe sur une équation de la forme (I), et pour l'intégrer on est obligé d'avoir recours à la série des substitutions (III). Je vais montrer maintenant comment il est possible d'éviter cette série et, par conséquent, l'intégration suivant Σ aussi.

En posant

$$u = \int e^{t\int A dx} \cdot T dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IX)}$$

A étant une fonction de x, et T fonction de t, on fait une ***substitution,*** il est donc permis de dire que le procédé reste le même, la forme seule change. Mais on va voir que la valeur de u donnée par (IX) constitue une transcendante nouvelle, et le procédé doit être considéré comme une ***méthode d'intégration.***

En substituant cette nouvelle fonction dans (I'), je me propose d'analyser les cas où l'intégration peut s'achever au moyen des intégrales définies; c'est-à-dire que l'intégrale indéfinie se trouve par l'intermédiaire de l'intégration entre certaines limites.

On trouve cette méthode dans plusieurs ouvrages, mais nulle part on ne l'applique, avec plus ou moins de succès, à l'équation générale

$$u'' + X_1 u' + X u = 0.$$

Nous croyons donc que la théorie que nous allons exposer ne sera pas dénuée d'intérêt.

76. On tire de (IX)

$$\frac{du}{dx} = \int A t e^{t\int A dx} \cdot T dt,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \int e^{t\int A dx} T \left[A^2 t^2 + \frac{dA}{dx} \cdot t \right] dt.$$

En substituant ces valeurs de u'', u', ainsi que celle de u dans l'équation

$$u''+X_1u'-Xu=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(D)$$

qui ne diffère de (I') que par le changement du signe devant X, on trouve

$$\int e^{t\int A dx}\cdot T\left[A^2t^2+\frac{dA}{dx}.t\right]dt+\int X_1e^{t\int A dx}\cdot AtTdt$$
$$-\int Xe^{t\int A dx}\cdot T\,.\,dt=0.$$

Faisons $\frac{X}{A^2}=q^2$, q étant une constante indéterminée, et écrivons la dernière équation de la manière suivante:

$$\int e^{t\int A dx}\cdot TA^2(t^2-q^2)dt+\int e^{t\int A dx}\cdot T\left[\frac{dA}{dx}t+X_1At\right]dt=0.$$

Alors l'intégration par parties du premier terme transformera cette dernière en celle-ci:

$$e^{t\int A dx}\cdot\frac{A^2}{\int A dx}\cdot T(t^2-q^2)-\int e^{t\int A dx}\cdot\frac{A^2}{\int A dx}\left\{\frac{dT}{dt}(t^2-q^2)+Tt\left[2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{dA}{dx}+AX_1\right)\frac{\int A dx}{A^2}\right]\right\}dt=0.$$

On pourra vérifier cette dernière en faisant

$$\frac{dT}{dt}(t^2-q^2)=Tt\left[\left(\frac{dA}{dx}+AX_1\right)\frac{\int A dx}{A^2}-2\right],$$

$$e^{t\int A dx}\cdot\frac{A^2}{\int A dx}(t^2-q^2)=0,$$

pourvu que l'on ait en même temps

$$\left(\frac{dA}{dx}+AX_1\right)\frac{\int A dx}{A^2}-2=2a,$$

a désignant une constante.

Cette dernière donne

$$A\left(\int A dx\right)^{-2(a+1)} = c_1 e^{-\int X_1 dx}.$$

Mais on a aussi $A^2 = \frac{X}{q^2}$; donc

$$\frac{X}{q^2}\left(\int \frac{\sqrt{X}}{q} dx\right)^{-4(a+1)} = c_1{}^2 e^{-2\int X_1 dx}.$$

D'où

$$X = \frac{e^{-2\int X_1 dx}}{\left(k+\int e^{-\int X_1 dx} . dx\right)^{\frac{4(a+1)}{2a+1}}},$$

k étant une constante arbitraire.

Toutes les fois que X aura cette valeur, on trouvera

$$T = C(t^2 - q^2)^a,$$

$$(t^2-q^2)^{a+1} . e^{\pm \frac{t}{q}\int X^{\frac{1}{2}} dx} = 0.$$

Les limites de l'intégration pourront être $t = \pm q$, $t = \mp \infty$. La valeur particulière de u sera donc

$$u_1 = C_1 \int_{-q}^{+q} e^{\frac{t}{q}\int X^{\frac{1}{2}} dx} (t^2 - q^2)^a . dt,$$

et elle pourra s'exprimer sans aucun signe d'intégration pour toutes les valeurs de a entières et positives. Comme on peut d'ailleurs changer a en $-a$, X en $-X$, il s'en suit que les cas d'intégrabilité peuvent s'exprimer en premier lieu par la formule suivante:

$$u'' + X_1 u' = \pm \frac{u\, e^{-2\int X_1 dx}}{\left(k+\int e^{-\int X_1 dx} . dx\right)^{\frac{4(a\pm 1)}{2a\pm 1}}}.$$

77. Pour trouver de nouveaux cas d'intégrabilité remplaçons $\int A dx$ par B (fonction de x) et opérons encore la substitution

$$u = \int e^{Bt} \cdot T \cdot dt;$$

il viendra

$$\int e^{tB} \cdot T\,[t^2B'^2 + tB'']dt + \int e^{tB}\, TX_1 tB'dt - \int Xe^{tB} \cdot Tdt = 0,$$

ou

$$\int e^{tB} \cdot TB'^2[t^2 - at - b]dt + \int e^{tB}\, Tt(X_1B' + B'' + aB'^2)dt = 0,$$

a et b étant deux constantes indéterminées; de plus nous avons fait

$$b = \frac{X}{B'^2}.$$

Intégrons par parties le premier terme, nous aurons

$$e^{tB}\, T\, \frac{B'^2}{B}(t^2 - at - b) - \int e^{tB} \left\{ \frac{B'^2}{B}(t^2 - at - b)T' \right.$$

$$\left. - T\left[t(X_1B' + B'' + aB'^2 - 2\frac{B'^2}{B}) + a\frac{B'^2}{B} \right] \right\} dt = 0.$$

Nous écrivons B' au lieu de $\frac{dB}{dx}$, et T' au lieu de $\frac{dT}{dt}$.

Faisons dans cette dernière équation

$$X_1B' + B'' + aB'^2 - 2\frac{B'^2}{B} = 2a_1\frac{B'^2}{B},$$

a_1 désignant une constante,

$$\frac{B'^2}{B}(t^2 - at - b)T' - T\left[t(X_1B' + B'' + aB'^2 - 2\frac{B'^2}{B}) + a\frac{B'^2}{B} \right] = 0$$

$$e^{tB}\, T(t^2 - at - b) = 0.$$

Si alors on désigne par α et β les deux racines de l'équation

$$t^2 - at - b = 0,$$

et que l'on suppose la première condition vérifiée, il viendra

$$T = C\left[\frac{(t-\alpha)^{\alpha}}{(t-\beta)^{\beta}}\right]^{\frac{2aa_1}{\alpha-\beta}},$$

$$u_1 = C_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{tB} \left[\frac{(t-\alpha)^{\alpha}}{(t-\beta)^{\beta}}\right]^{\frac{2aa_1}{\alpha-\beta}} dt,$$

u_1 désignant l'intégrale particulière cherchée.

Supposons de plus que $\frac{2aa_1\alpha}{\alpha-\beta}$ et $\frac{2aa_1\beta}{\beta-\alpha}$ soient des nombres quelconques positifs; on pourra choisir pour limites $t_1=\beta$, $t_0=\alpha$, et, comme on va voir, $t=\pm\infty$.

La condition que nous avons supposé vérifiée fournit

$$B'^{B} \cdot e^{-2(a_1+1)\,aB} = k\, e^{-\int X_1 dx} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (X)$$

Donc les variables se séparent et la solution se ramène aux quadratures, ainsi que nous l'avions dit.

Si l'on n'avait pas posé

$$b = \frac{X}{B'^2},$$

on aurait à vérifier les deux équations suivantes

$$B'' + aB'^2 + X_1 B' = 2(a_1+1)\frac{B'^2}{B};$$

$$(a+b_1)\frac{B'^2}{B} + bB'^2 = X,$$

a_1 et b_1 désignant deux constantes indéterminées.

On tire de la première

$$B'^{B} \cdot e^{-2(a_1+1)\,aB} = k\, e^{-\int X_1 dx},$$

et l'autre détermine X sans intégration.

On s'aperçoit qu'à cause de la valeur $B' = \pm\left(\frac{X}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, tirée

de l'équation $b = \frac{X}{B'^2}$, les valeurs des limites $t = \mp\infty$ peuvent être admises aussi.

78. Considérons encore la valeur

$$u = \int e^{tB} . QT dt,$$

B et Q étant des fonctions de x seule et T fonction de t seule.

La transformée sera

$$\int e^{tB} T.Q.B'^2(t^2 - at + b)dt + \int e^{tB} T.Q\left[t(B'' + 2B'\frac{Q'}{Q} + X_1B' + aB'^2) + \frac{Q''}{Q} + X_1\frac{Q'}{Q} - X - bB'^2\right]dt = 0,$$

a et b désignant comme précédemment deux constantes indéterminées.

Le premier terme s'intégrera par parties, ce qui donnera

$$e^{tB} TQ\frac{B'^2}{B}(t^2 - at + b) - \int e^{tB} Q\left\{\frac{B'^2}{B}\frac{d}{dt}(t^2 - at + b)T - T\left[t(B'' + 2\frac{Q'}{Q}B' + X_1B' + aB'^2) + \frac{Q''}{Q} + X_1\frac{Q'}{Q} - X - bB'^2\right]\right\}dt = 0.$$

Après quoi faisons

$$e^{tB} T(t^2 - at + b) = 0 \text{ pour les limites,}$$

et $$\frac{B'^2}{B}(t^2 - at + b)\frac{dT}{dt} = T\left[t(B'' + 2B'\frac{Q'}{Q} + X_1B' + aB'^2 - 2\frac{B'^2}{B} + \frac{Q''}{Q} + X_1\frac{Q'}{Q} - X - bB'^2 + a\frac{B'^2}{B}\right]$$

pour déterminer T.

T sera indépendante de x si l'on vérifie les conditions

$$\left.\begin{aligned} B'' + B'(2\frac{Q'}{Q} + X_1) + aB'^2 - 2(a_1 + 1)\frac{B'^2}{B} &= 0 \\ \frac{Q''}{Q} + X_1\frac{Q'}{Q} - X - bB'^2 + a\frac{B'^2}{B} + b_1\frac{B'^2}{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

a_1 et b_1 désignant deux constantes indéterminées.

La première donne

$$B'B^{-2(a_1+1)}\,.\,Q^2.e^{aB+\int X_1 dx} = k \text{ (constante)}.....(a)$$

Tirant la valeur de Q et substituant dans l'autre équation, on trouve

$$-2\frac{B'''}{B'}+3\left(\frac{B''}{B'}\right)^2+4a_1(a_1+1)\left(\frac{B'}{B}\right)^2+$$

$$+4(b_1-aa_1)\frac{B'^2}{B}+(a^2-4b)B'^2-X_1^2-2X'_1-4X=0.....(XI)$$

Cette équation vérifiée, il viendra $\frac{dT}{T}=\frac{2a_1t-b_1}{t^2-at+b}\,dt$ pour déterminer T, et $Te^{tB}(t^2-at+b)=0$ pour les limites.

79. Si l'on fait dans (A)

$$Q=e^{-\int W dx}\left[c_2+c_1\int e^{\int(2W-X_1)dx}dx\right],$$

W étant une fonction indéterminée, que l'on tire ensuite la valeur de B de l'équation

$$B^{-2(a_1+1)}\,.\,e^{aB}\,.\,dB=k_2+k_1\int\frac{e^{-\int X_1 dx}}{Q^2}\,dx,$$

on pourra alors attribuer à X la valeur

$$X=\frac{B'^2}{B}(a+b_1)-bB'^2-WX_1-W'+W^2;.....(XII)$$

l'équation

$$u''+X_1u'+\left(W'-W^2+X_1W+bB'^2-(a+b_1)\frac{B'^2}{B}\right)u=0$$

sera intégrable, sachant d'ailleurs, que W est une fonction arbitraire.

80. Autrement. La valeur de Q étant donnée par (*a*), posons

$$P'+P^2=X+\frac{X_1'}{2}+\frac{X_1^2}{4},$$

et déterminons soit P, soit X; faisons de plus $a = \pm 2\sqrt{b}$, $b_1 = a.a_1$: l'équation (XI) pourra s'intégrer alors à l'aide du facteur

$$\mu = B^m . \overline{B'}^{\frac{1}{2}} . e^{\int P dx},$$

où $$m = a_1 + 1.$$

On trouve, en effet,

$$-2B^{m+2} . \overline{B'}^{\frac{3}{2}} . B'' . e^{\int P dx} + 4(m+2)B^{m+1}B'^{\frac{1}{2}} . e^{\int P dx}$$

$$-4PB^{m+2} . \overline{B'}^{\frac{1}{2}} e^{\int P dx} = c.$$

Nous ferons ensuite $c = 0$, ce qui permettra d'intégrer une seconde fois, car cette équation deviendra

$$-BB'' + 2(m+2)B'^2 - 2PBB' = 0,$$

et pour $a_1 = \frac{1}{2}$ donnera

$$e^{2\int P dx} . BB' = \text{constante}.$$

D'où

$$\frac{B^2}{2} = k_1 + k_2 \int e^{-2\int P dx} dx.$$

81. Voyons enfin ce qui résultera de l'hypothèse $B = hx$, h désignant une constante.

L'équation (XI) devient

$$4a_1(a_1+1)\frac{1}{x^2} + 4(b_1 - aa_1)\frac{h}{x} + h^2(a^2 - 4b) = X_1^2 + 2X'_1 + 4X,$$

et en faisant $b_1 = aa_1$, $X_1 = 0$, on obtient

$$T = (t^2 - at + b)^{a_1}$$

a_1 devra être un entier positif, et la valeur de X sera

$$X = \frac{h^2}{4}(a^2 - 4b) + \frac{a_1}{x^2}(a_1 + 1).$$

On sait d'ailleurs que l'équation de Riccati peut se présenter sous la forme

$$u''=\left[\frac{4}{(n+2)^2}-\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]u,$$

donc

$$\frac{h^2}{4}(a^2-4b)=\frac{4}{(n+2)^2},\quad a_1(a_1+1)=-\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2},$$

d'où

$$n=-2\pm\frac{2}{a_1+1}.$$

Cette valeur de n résulte donc de l'hypothèse $B=hx$.

L'équation (a) fait voir que l'on ne peut attribuer à Q la valeur $Q=1$ que si celle de X_1 est $\frac{2(a_1+1)}{x}-ah$, et celle de X $\frac{h(b_1+a)}{x}-bh^2$.

Résumé. — 82. Combinons maintenant tout ce qui se rapporte à l'intégrabilité de l'équation linéaire du 2-d ordre

$$u''+X_1u'-Xu=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

1°. La notation symbolique permet de l'écrire sous la forme du binôme

$$(D+\beta)(D+\alpha)u+(D+\alpha)(D+\beta)u=0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

où

$$\alpha=\frac{X_1\pm\sqrt{X_1^2+2X_1'+4X}}{2}$$

$$\beta=\frac{X_1\mp\sqrt{X_1^2+2X_1'+4X}}{2}.$$

Faisant ensuite $(D+\alpha)u=p'e^{-\int\alpha dx}$, il vient, après réduction,

$$p''+(\beta-\alpha)p'+\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')p=0. \quad \ldots\ldots\ldots (d_1)$$

2°. On a trouvé aussi (n^{os} 44, 45) les deux formes

$$(D+p-m)\left(D+p+\frac{p'}{p}\right)u+b(D+p-m)\left(D-m+\frac{p'}{p}\right)e^{\int\frac{mdx}{u}}$$

$$+c(D-m)\left(D-2m+\frac{p'}{p}\right)e^{2\int\frac{mdx}{u}}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(D+\alpha)(D+\alpha+m)u+b(D+\alpha)(D+\alpha+k)e^{\int\frac{mdx}{u}}$$

$$+c(D+\alpha+k)(D+\alpha+k-m)e^{2\int\frac{mdx}{u}}=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

qui permettent d'intégrer une classe nombreuse d'équations du 2-d ordre.

3°. On peut transformer l'équation

$$u+f(D_1)x^ru=X$$

en

$$W+\Phi(D_1)x^rW=P \quad (n^0\ 47)$$

ce qui se rapporte à une autre classe d'équations de la forme (D).

4°. D'après le procédé du n° 55 on peut réduire (D) aux équations simultanées

$$\frac{du}{dx}=p,\quad \frac{dp}{dx}=-X_1p+Xu,\quad \frac{d^2p}{dx^2}=-X_1p'-(X_1'-X)p+X'u,$$

lesquelles fourniront

$$\alpha u''+\beta u'+\gamma u=ce^{\int Adx},$$

et, par l'élimination de u'' entre cette équation et (D), l'intégrale première d'abord et la primitive ensuite. Les trois fonctions α, β, γ sont liées par les équations

$$\alpha'-\alpha X_1=A\alpha,\quad \beta'+\gamma-\beta X_1-\alpha X_1'+\alpha X=A\beta,$$

$$\gamma'+\beta X+\alpha X'=A\gamma.$$

On en tire

$$\alpha\, e^{-\int(X_1+A)dx}=k,$$

$$\beta X\, e^{-\int Adx}=-\frac{d}{dx}\left(\gamma\, e^{-\int Adx}\right)-kX'e^{\int X_1dx},$$

et il reste à trouver une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right)-\left(X_1+\frac{X'}{X}\right)\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right)-X\gamma e^{-\int A dx}+$$

$$+kXe^{\int X_1 dx}\left[\frac{X''}{X}-\frac{X'^2}{X^2}+X_1'-X\right]\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

5°. A l'aide de la substitution

$$u=w.e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}$$

et en posant pour abréger

$$P=-X-\frac{1}{2}X_1'-\frac{1}{4}X_1^2,$$

on transforme (D) en

$$w''+Pw=0,$$

après quoi, différentiant n fois de suite et éliminant w et ses n—1 dérivées, il vient

$$D_n w^{(n+2)}-D_n' w^{(n+1)}+D_{n+1}w^{(n)}=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

les valeurs des déterminants étant données par la formule (n° 60)

$$D_r=\begin{vmatrix} P, & 0, & 1, & 0 & \ldots\ldots \\ P', & P, & 0, & 1, & 0\ldots\ldots \\ P'', & 2P', & P, & 0, & 1\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ P^{(r-1)}, & (r-1)P^{(r-2)}, & \ldots & P & \end{vmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B).$$

6°. Outre l'équation

$$u''+X_1u'=\pm\frac{u.e^{-2\int X dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_1 dx}dx\right)^n},\quad n=\frac{4(a+1)}{2a+1},$$

qui est séparable, on ramène aux quadratures aussi l'équation suivante: (n° 77)

$$u''-u'\cdot\frac{d}{dx}\log\left[X^{\frac{1}{2}}\left(\int X^{\frac{1}{2}}\,dx\right)^{-2(a_1+1)}\,e^{aX^{\frac{1}{2}}}\right]-uX=0\ldots(6).$$

83. Considérons en premier lieu l'équation

$$p''+(\beta-\alpha)p'+\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')p=0\ldots\ldots\ldots(d_1)$$

En vertu de la formule

$$X=\pm\frac{e^{-2\int X_1\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_1\,dx}\,dx\right)^n},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II_n)$$

trouvée pour l'équation

$$u''+X_1u'-Xu=0,$$

(d_1) sera intégrable si l'on a

$$\beta'-\alpha'=\pm\frac{2e^{2\int(\alpha-\beta)dx}}{\left(c+\int e^{\int(\alpha-\beta)dx}\,dx\right)^n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f_1).$$

Mais on ne sait pas déduire de cette formule la valeur de X, à moins que l'on n'ait $n=2$.

Cette valeur n'est pas comprise dans la formule $n=\frac{4(a+1)}{2a+1}$, mais l'intégration est possible.

En effet, changeant la variable indépendante, on trouve

$$\frac{d^2p}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2t}{dx^2}+(\beta-\alpha)\frac{dt}{dx}\right)\frac{dp}{dt}+\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')p=0.$$

Déterminons t de manière à vérifier l'équation

$$\frac{d^2t}{dx^2}+(\beta-\alpha)\frac{dt}{dx}=-\left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

nous aurons

$$\frac{dt}{dx}=\frac{e^{\int(\alpha-\beta)dx}}{c+\int e^{\int(\alpha-\beta)\,dx}\,dx}.$$

Et comme par hypothèse on a aussi

$$\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=\pm\frac{e^{2\int(\alpha-\beta)\,dx}}{(c+\int e^{\int(\alpha-\beta)\,dx}dx)^2},$$

il s'en suit que

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=\frac{1}{2}(\beta'-\alpha'),$$

et il vient

$$\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\pm p=0.$$

Pour déduire la valeur de X dans ce cas, faisons

$$c+\int e^{\int(\alpha-\beta)dx}dx=q;$$

nous aurons

$$e^{\int(\alpha-\beta)dx}=q', \quad e^{2\int(\alpha-\beta)dx}=q'^2,$$

$$\alpha-\beta=\frac{q''}{q'}, \quad \beta'-\alpha'=-\frac{q'''}{q'}+\frac{q''^2}{q'^2};$$

donc

$$\frac{q'''}{q'}-\frac{q''^2}{q'^2}\pm\frac{2q'^2}{q^2}=0. \qquad (7)$$

Le facteur intégrant de cette dernière est q^{-m}, m étant une constante définie par l'équation

$$m^2+m\pm 2=0.$$

On trouve, en effet, que (7) multipliée par q^{-m} a pour intégrale première

$$q^{-m}\left(\frac{q''}{q'}+m\frac{q'}{q}\right)=\text{constante}.$$

Et comme il s'agit d'une solution quelconque, je ferai cette constante $=0$, après quoi je trouverai par intégration

$$q'q^m = k, \quad \frac{q^{m+1}}{m+1} = kx + k_1, \text{ ou}$$

$$q^{m+1} = a_1 x + b_1.$$

D'où

$$c + \int e^{\int (\alpha - \beta) dx} dx = (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$e^{\int (\alpha - \beta)\, dx} = \frac{d}{dx} (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$\alpha - \beta = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{m+1}}$$

$$\sqrt{X_1^2 + 2X_1' + 4X} = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$X = -\frac{1}{4}(X_1^2 + 2X_1') + \left[\frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{m+1}},\right]^2.$$

Il est évident que la formule (f_1) peut fournir d'autres cas d'intégrabilité, seulement on ne sait pas les exprimer.

84. L'équation (D) est intégrable si l'on a

$$\frac{X''}{X} - \frac{X'^2}{X^2} + X_1' - X = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f_2)$$

attendu que l'équation (4) aura pour intégrale particulière

$$\gamma e^{-\int A dx} = -Xe^{\int X_1 dx}.$$

Appliquant cette condition à (d_1), on trouve

$$\frac{\beta''' - \alpha'''}{\beta' - \alpha'} - \frac{(\beta'' - \alpha'')^2}{(\beta' - \alpha')^2} + \beta' - \alpha' + \frac{1}{2}(\beta' - \alpha') = 0.$$

D'où

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3} \log (kx + k_1),$$

$$X_1^2 + 2X_1' + 4X = \frac{4}{9} [\log (kx + k_1)]^2.$$

85. Les cas d'intégrabilité compris dans les formules (2) et (3) étant incalculables et inexprimables autrement que par ces formules elles-mêmes, nous croyons pouvoir nous contenter des exemples déjà donnés (n° 44, 45...) et de la combinaison suivante.

$$(D+\alpha)(D+\alpha+\frac{1}{x})u+b(D+\alpha)(D+\alpha)xu+c(D+\alpha)(D+\alpha-\frac{1}{x})x^2u=0.$$

Cette équation est immédiatement intégrable, attendu que tous les termes ont $(D+\alpha)$ pour facteur commun, et quand on la ramène à la forme ordinaire pour comparer les coefficients avec ceux de (D), on trouve

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[X_1-\frac{3}{x}+\frac{2+bx}{x(1+bx+cx^2)}\right],$$

$$X+\frac{X_1'}{2}+\frac{X_1^2}{4}=\frac{1}{4x^2(1+bx+cx^2)^2}\,[17c^2x^4+24bcx^3+$$

$$+2(3b^2+8bc-c)x^2+4bx-3]. \ldots\ldots\ldots\ldots (f_3)$$

Connaissant cette équation de condition on pourra, l'appliquer à (d_1), (4) et (5).

86. Passons maintenant à l'équation (4).

On pourrait développer

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right),\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma e^{-\int A dx}\right)$$

et appliquer ensuite au résultat tour à tour chacune des formules (f_1), (f_2), (f_3), mais pour simplifier les calculs il est bon de prendre $\gamma e^{-\int A dx}$ pour une seule inconnue en posant

$$\gamma e^{-\int A dx}=\theta;$$

l'équation deviendra

$$\theta''-\left(X_1+\frac{X'}{X}\right)\theta'-X\theta+kXe^{\int X_1 dx}.P=0,\ldots\ldots\ldots (4')$$

où

$$P=\frac{X''}{X}-\frac{X'^2}{X^2}+X_1'-X.$$

On a vu que si $P = 0$, l'intégrale particulière

$$\theta = -Xe^{\int X_1 dx}$$

fournirait l'intégrale générale de la proposée. Il s'en suit que l'équation (4') peut s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\theta + kXe^{\int X_1 dx}) - \left(X_1 + \frac{X'}{X}\right)\frac{d}{dx}(\theta + kXe^{\int X_1 dx}) - X(\theta + ke^{\int X_1 dx}.X) = 0. \quad (4'')$$

En vertu de la formule (f_2), ou $P = 0$, on peut intégrer l'équation

$$u'' + \left(\int X dx - \frac{X'}{X}\right)u' - Xu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (d_2)$$

en ajoutant même à l'intégrale $\int X dx$ une constante arbitraire, et cette équation n'est pas comprise dans la formule (II_n).

Reprenons donc l'équation (D), et, après l'avoir différentiée deux fois de suite, intégrons le système suivant:

$$\begin{aligned}
u' &= p \\
p' &= -X_1 p + Xu \\
p'' &= -X_1 p' - (X_1' - X)p + X'u \\
p''' &= -X_1 p'' - (2X_1' - X)p' - (X_1'' - 2X')p + X''u.
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie ces équations, la dernière par α, la troisième par β, la deuxième par γ, la première par ε, sachant que ces facteurs désignent des fonctions de x, et qu'on les ajoute ensuite, en pourra écrire le résultat de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\alpha p'' + \beta p' + \gamma p + \varepsilon u] = {} & (\alpha' - \alpha X)p'' + [\beta' - \alpha(2X_1' - X) - \beta X_1]p' \\
& + [\gamma' - \alpha(X_1'' - 2X') - \beta(X_1' - X) - \gamma X_1 + \varepsilon]p \\
& + (\varepsilon' + \alpha X'' + \beta X' + \gamma X)u.
\end{aligned}$$

Ou, restaurant les valeurs de p, p', p'', et posant

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha X_1 &= A\alpha \\
\beta' - \alpha(2X_1' - X) - \beta X_1 &= A\beta \\
\gamma' - \alpha(X_1'' - 2X') - \beta(X_1' - X) - \gamma X_1 + \varepsilon &= A\gamma
\end{aligned}$$

$$\varepsilon' + \alpha X'' + \beta X' + \gamma X = A\varepsilon,$$

$$\frac{d}{dx}[\alpha u''' + \beta u'' + \gamma u' + \varepsilon u] = A[\alpha u''' + \beta u'' + \gamma u' + \varepsilon u],$$

A désignant une fonction de x.

Intégrant on trouve

$$\alpha u''' + \beta u'' + \gamma u' + \varepsilon u = ce^{\int A dx}.$$

Si les valeurs particulières des facteurs α, β, γ, ε propres à vérifier les conditions prescrites étaient connues, on éliminerait u''' et u'' à l'aide de la proposée et de sa dérivée première; il en résulterait une équation linéaire du 1-r ordre par rapport à u; on trouverait donc l'intégrale générale de la proposée.

Or, trois des quatre inconnues se déterminent sans difficultés; on trouve nommément

$$\alpha e^{-\int (X_1 + A)dx} = \text{constante} = k,$$

$$\beta e^{-\int (X_1 + A)dx} = k_1 + 2kX_1 - k\int X dx,$$

$$\gamma e^{-\int (X_1 + A)dx} = -\frac{e^{-\int X_1 dx}}{X} \cdot v - k_1 \frac{X'}{X} - k\left(\frac{X''}{X} + 2X_1 \frac{X'}{X} - \frac{X'}{X}\int X dx\right),$$

$$v = e^{-\int A dx} \cdot \varepsilon,$$

après quoi il reste à trouver une intégrale particulière de l'équation en v.

Cette dernière se présente sous la forme suivante:

$$\frac{d^2}{dx}(v + k_1 X e^{\int X_1 dx}) - \left(X_1 + \frac{X'}{X}\right) \cdot \frac{d}{dx}(v + k_1 X e^{\int X_1 dx})$$

$$- X(v + k_1 X e^{\int X_1 dx}) + X e^{\int X_1} \cdot \frac{d}{dx}\frac{X''}{X} +$$

$$+ kX e^{\int X_1 dx}[X_1'' - 3X' + 2X_1 \frac{X'}{X} + P(2X_1 - \int X dx)] = 0,$$

P désignant comme précédemment

$$\frac{d}{dx}\frac{X'}{X}+X_1'-X.$$

D'où l'on conclut que la valeur particulière

$$v=-k_1Xe^{\int X_1 dx}$$

fournira l'intégrale générale de la proposée toutes les fois que la condition

$$\frac{d}{dx}\frac{X''}{X}+k[X_1''-3X'+2X_1'\frac{X'}{X}+P(2X_1-\int X dx)]=0\ldots.(f_4)$$

se trouvera vérifiée.

S'il est possible ou non de vérifier les équations (4''), (4''') sans aucune condition, sous ce rapport il y a incertitude. Il est évident seulement qu'à mesure que l'on augmente le nombre des dérivées de (D), la probabilité de résoudre la question augmente aussi. En effet, chaque nouvelle dérivée fournit une nouvelle formule de l'espèce (f_2), (f_4), et chacune d'elles peut être appliquée soit à l'équation

$$p''+(\beta-\alpha)p'+\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')p=0\ldots\ldots\ldots(d_1)$$

soit à une transformée de cette dernière. Or, du moment que le nombre des cas d'intégrabilité augmente indéfiniment, la probabilité de trouver la solution générale doit augmenter aussi.

87. Mais la plus forte preuve à l'appui de ce que j'avance est comprise dans l'équation

$$D_nw^{(n+2)}-D_n'w^{(n+1)}+D_{n+1}w^n=0\ldots\ldots\ldots(5).$$

Il est visible qu'en posant $w^n=w_1$, on obtient une équation du même ordre que la proposée,

$$D_nw_1''-D_n'w_1'+D_{n+1}w_1=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(5')$$

mais avec des coefficients liés entre eux par la formule (B). Si donc on applique à cette équation tour à tour chacune des formules indiquées dans les quatre derniers n-^{os}, il est très-probable qu'on trouvera sinon l'intégrale particulière elle-même du moins la forme de cette intégrale; c'est-à-dire que l'on pourra

savoir au juste quelle classe de fonctions, algébriques, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, etc, peut vérifier l'équation du 2-d ordre linéaire pour des valeurs données des coefficients X_1 et X.

Appliquant, par exemple, à l'équation (5') la formule (II_n) on trouve

$$D_{n+1} = \frac{D_n^3}{(c+\int D_n dx)^m}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II_m)$$

la valeur de m étant donnée par la formule

$$m = \frac{4(a+1)}{2a+1},$$

et a désignant un entier positif quelconque.

Faisant $n = 1$, il vient

$$P^2 = \frac{P^3}{(c+\int P dx)^m},$$

d'où

$$P = -X - \frac{1}{2}X_1' - \frac{1}{4}X_1^2 = \frac{1}{[k-(m-1)x]^{\frac{m}{m-1}}}.$$

Pour $n = 2$ on trouve

$$P^3 + 2P'^2 - P \cdot P'' = \frac{P^6}{(c+\int P^2 dx)^m},$$

et il est impossible d'en tirer la valeur de P.

A plus forte raison trouverait-on des difficultés insurmontables pour appliquer aux équations (IV) et (V) du n° 67 la formule générale (II). A partir de $r = 2$, en faisant dans ces équations $m = 1$, et en déterminant f_1 et f_2 des équations

$$f_1' + Af_1^2 + Bf_1 = 0,$$

$$-f_2' + Pf_2^2 + (B+2Af_1)f_2 = 0,$$

on trouve pour déterminer P une équation insoluble.

88. En résumé le développement des méthodes mathématiques pour trouver les solutions particulières dépend des trois problèmes suivants.

Problème 1-r.—L'équation du 1-r ordre

$$y' + Ay^2 + By + P = 0$$

se ramène au moyen de la série de substitutions

$$y = f_1 + \frac{m}{y_1}, \ldots . y_{r-1} = f_r + \frac{m}{y_r}$$

aux deux équations simultanées

$$(-1)^r m^r y_r' + A_r y_r^2 + \left(q_r \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_r f_{r+1}}{m^r} \right) m^r y_r + A_{r-1} m^2 = 0$$

$$A_r = (-1)^{r-1} m^{r-1} f_r' + A_{r-1} f_r^2 +$$

$$+ \left(q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}} \right) m^{r-1} f_r + A_{r-2} m^2;$$

il s'agit de trouver les cas d'intégrabilité compris dans les principales combinaisons que l'on peut tirer de ces deux équations, sachant d'ailleurs que les variables se séparent toutes les fois que l'on a

$$P = \frac{A e^{-2\int B dx}}{\left(c - k \int A e^{-\int B dx} dx \right)^2},$$

ou

$$A = \frac{P e^{2\int B dx}}{\left(c_1 + k_1 \int P e^{\int B dx} dx \right)^2}.$$

Je n'ai analysé que la combinaison

$$f_r' = 0 \quad A_r = A_{r-2} m^2, \quad A_{r-1} f_r^2 + \left(q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_r f_r}{m^{r-1}} \right) m^{r-1} f_r = 0.$$

On pourrait donc se proposer d'épuiser ler deux combinaisons suivantes:

1-re combinaison. $A_r = A_{r-2} m^2,$

$$(-1)^{r-1} m^{r-1} f_r' + A_{r-1} f_r^2 + \left(q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}} \right) m^{r-1} f_r = 0.$$

2-de combin. $A_r = (-1)^{r-1} m^{r-1} f_r',$

$$A_{r-1} f_r^2 + \left(q_{r-1} \frac{m'}{m} + B + 2\Sigma \frac{A_{r-1} f_r}{m^{r-1}} \right) m^{r-1} f_r + A_{r-2} m^2 = 0.$$

D'ailleurs j'ai intégré à partir de $r = 0$; il s'agirait d'effectuer la sommation à partir de $r = r_1$, en prenant $r_1 = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Problème 2. — La proposée étant

$$u'' + X_1 u' - Xu = 0,$$

on intègre les équations simultanées

$$u' = p$$
$$p' = -X_1 p + Xu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(r)} = -\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(X_1 p) + \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(Xu),$$

et on trouve que la question se ramène à une équation de la forme

$$\frac{d^2}{dx^2}(\theta + kXe^{\int X_1 dx}) - \left(X_1 + \frac{X'}{X}\right)\frac{d}{dx}(\theta + kXe^{\int X_1 dx}) - X(\theta + kXe^{\int X_1 dx}) = M,$$

qui est satisfaite soit en posant

$$\theta = -Xe^{\int X_1 dx}, \quad \text{soit} \quad \theta = -kXe^{\int X_1 dx},$$

pourvu que l'on ait en même temps

$$M = 0.$$

On demande à trouver la valeur générale de M.

Problème 3. — Les différentiations combinées avec l'élimination transforment l'équation

$$w'' + Pw = 0, \quad \text{où} \quad P = -X - \frac{1}{2}X_1' - \frac{1}{4}X_1^2,$$

en

$$D_n w^{(n+2)} - D_n' w^{(n+1)} + D_{n+1} w^{(n)} = 0:$$

on demande la valeur du déterminant D_n, sachant que sa valeur symbolique est

$$D_n = \begin{vmatrix} P, & 0, & 1, & 0 \ldots\ldots \\ P', & P, & 0, & 1, & 0 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P^{(n-1)}, & (n-1)P^{(n-2)} \ldots P \end{vmatrix}.$$

Aussitôt que cette valeur sera définie, on pourra trouver aussi un grand nombre de cas nouveaux d'intégrabilité.

Problème 4. — On a vu que la substitution $u = \int e^{B.t} . Q.T.dt$, étant appliquée à l'équation

$$u'' + X_1 u' + Xu = 0,$$

fournit la relation (n° 78)

$$-2\frac{B'''}{B'} + 3\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 + 4a_1(a_1+1)\frac{B'^2}{B^2} +$$

$$+ 4(b_1 - aa_1)\frac{B'^2}{B} + (a^2 - 4b)B'^2 - X_1^2 - 2X_1' - 4X = 0;$$

on demande à trouver une intégrale particulière de cette équation.

Peut-être parviendra-t-on un jour à développer la théorie des *équations aux différences partielles mêlées*, ainsi que celle des *déterminants;* tout pas progressif dans ces deux branches de l'analyse fera avancer aussi la solution des problèmes que je viens d'indiquer.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES.

CHAPITRE I.

Intégration immédiate.

1. Les deux questions que je vais résoudre sont celles-ci:

1°. *Une équation aux différences étant donnée, déterminer comment on peut reconnaître lorsqu'elle est une différence exacte?*

2°. *Quel est le moyen d'intégrer cette équation?*

Convenons d'écrire $U_{u,x} = C$, et quelquefois simplement $U = C$, au lieu de $F(x, u) = C$, x étant comme toujours la variable indépendante ayant pour incrément un nombre constant $\Delta x = h$. Adoptons en outre une notation analogue à celle qu'on emploie dans le calcul infinitésimal. Nous écrirons nommément

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x$$

au lieu de $U_{u,x+h} - U_{u,x}$ ou au lieu de

$$F(x+h,u) - F(x,u); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

de même $\frac{\Delta U}{\Delta u}\Delta u$ représentera la différence prise par rapport à u, en sorte que

$$U_{u+\Delta u,x} - U_{u,x} = \frac{\Delta U}{\Delta u}\Delta u = F(x,u+\Delta u) - F(x,u), \quad \ldots (2)$$

Enfin le symbole

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta u}\Delta u \Delta x$$

indiquera la double opération qui consiste à changer, dans la

fonction $\frac{\Delta U}{\Delta u}$, x en $x+h$ et à prendre ensuite la différence, en sorte que

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta u \Delta x = U_{u+\Delta u, x+\Delta x} - U_{u, x+\Delta x} - U_{u+\Delta u, x} + U_{u,x}$$

$$= F(u+\Delta u, x+\Delta x) - F(u, x+\Delta x) - F(u+\Delta u, x) + F(u,x) \ldots (3)$$

En vertu de cette notation la différence totale de la fonction primitive

$$U_{u,x} = C,$$

C désignant une constante arbitraire, s'exprimera par l'équation suivante:

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x + \left(\frac{\Delta U}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta x\right)\Delta u = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

En effet, remplaçant

$$\frac{\Delta U}{\Delta u}\Delta x, \quad \frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta u \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta u \Delta x$$

par leurs valeurs correspondantes (1), (2), (3), on trouve

$$F(u+\Delta u, x+\Delta x) - F(u,x) = 0.$$

Ce qui est la différence totale de $F(u,x) = C$.

Et si l'on fait

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = M, \quad \frac{\Delta U}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta x = N,$$

il viendra

$$M\Delta x + N\Delta u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

2. Prenons la différence de M par rapport à la seule variable u; nous aurons

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta x \Delta u} = \frac{\Delta M}{\Delta u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Prenons ensuite la différence de cette dernière égalité par rapport à x; il viendra

$$\frac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u} = \frac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Prenons enfin la différence de N par rapport à x,

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x} + \frac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u} \Delta x,$$

et dans cette expression remplaçons $\frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}$, $\frac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u}$ par leurs valeurs correspondantes (4) et (5); nous trouverons la formule

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x} \Delta x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Toutes les fois que cette équation de condition aura lieu, la différence proposée sera le résultat de la seule opération indiquée par le symbole Δ, ou sera une différence exacte. Ce qui est la solution de la 1-re question relativement à toute équation aux différences du 1-r ordre.

On reconnaît sans peine que la formule (II) devient

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{du},$$

et l'équation (I') se change en

$$M dx + N du = 0,$$

lorsque les incréments deviennent infiniment petits.

3. La méthode d'intégration immédiate que je vais exposer dans ce numéro présente cet avantage important qu'elle permet de résoudre les deux questions à la fois et, d'ailleurs, quel que soit l'ordre de la proposée.

On a par hypothèse

$$M \Delta x + N \Delta u = \Delta U.$$

Intégrons le terme $M \Delta x$ seul en considérant u comme constante, et écrivons

$$U' = \Sigma M \Delta x.$$

Prenons ensuite la différence totale de cette expression,

$$\Delta U' = M \Delta x + \left\{ \frac{\Delta(\Sigma M \Delta x)}{\Delta u} + \frac{\Delta^2(\Sigma M \Delta x)}{\Delta x \Delta u} \Delta x \right\} \Delta u,$$

et retranchons ce résultat de l'équation donnée; nous aurons

$$\Delta U - \Delta U' = \left\{ N - \frac{\Delta(\Sigma M \Delta x)}{\Delta u} - \frac{\Delta^2(\Sigma M \Delta x)}{\Delta x \Delta u} \Delta x \right\} \Delta u.$$

Le premier membre étant une différence exacte, il en doit être de même du second membre; mais ceci ne saurait avoir lieu que si le coefficient de Δu est indépendant de x: donc

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} - \frac{\Delta^2(\Sigma M \Delta x)}{\Delta u \Delta x} - \frac{\Delta^3(\Sigma M \Delta x)}{\Delta x^2 \Delta u} \Delta x = 0.$$

Ce qui est la formule (II), attendu que

$$\frac{\Delta^2(\Sigma M \Delta x)}{\Delta u \Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta u}, \qquad \frac{\Delta^3 \Sigma M \Delta x}{\Delta x^2 \Delta u} = \frac{\Delta^2 M}{\Delta x \Delta u}.$$

4. Appliquons cette méthode d'intégration à l'équation du 2-d ordre

$$(x+2\Delta x)^2 \Delta^2 u + 2(2x+3\Delta x)\Delta x \Delta u + 2u \Delta x^2 = 0,$$

que nous représenterons toujours par $\Delta U = 0$.

Intégrant le terme $2u\Delta x^2$ par rapport à x, il vient

$$U' = u(2x\Delta x + \Delta x^2).$$

Retranchant la différence totale

$$\Delta U' = 2u\Delta x^2 + (2x+3\Delta x)\Delta x \Delta u$$

de l'équation donnée, on trouve

$$\Delta U - \Delta U' = (x+2\Delta x)^2 . \Delta^2 u + (2x+3\Delta x)\Delta x \Delta u.$$

Dans cette expression intégrons le terme

$$(2x+3\Delta x)\Delta x \Delta u$$

qui contient la plus faible puissance de Δu; désignant cette intégrale partielle par U'', nous trouvons

$$U'' = (x^2 + 2x\Delta x)\Delta u.$$

La différence totale étant

$$\Delta U'' = (2x+3\Delta x)\Delta x \Delta u + |(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)\Delta x . \Delta^2 u,$$

je la retranche de $\Delta U - \Delta U'$, et j'obtiens

$$\Delta U - \Delta U' - \Delta U'' = \Delta x^2 \Delta^2 u.$$

D'où

$$U = U' + U'' + \Delta x^2 . \Delta u,$$

et la primitive du 1-r ordre par rapport à la proposée est

$$\left[\frac{c}{\Delta x} + u(2x + \Delta x)\right]\Delta x + (x + \Delta x)^2 \Delta u = 0.$$

On a donc actuellement

$$M = \frac{c}{\Delta x} + u(2x + \Delta x), \qquad N = (x + \Delta x)^2.$$

Appliquant la formule (II), je trouve

$$\frac{\Delta M}{\Delta u} = 2x + \Delta x, \qquad \frac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x} = 2, \qquad \frac{dN}{\Delta x} = 2x + 3\Delta x,$$

$$2x + 3\Delta x = 2x + \Delta x + 2\Delta x,$$

$$0 = 0,$$

donc l'intégrale première est une différence exacte.

Actuellement

$$\sum_x M \Delta x = \frac{cx}{\Delta x} + u \, . \, x^2,$$

$$\Delta\left(\sum_x M \Delta x\right) = c + u(2x + \Delta x)\Delta x + (x + \Delta x)^2 \Delta u,$$

et après avoir retranché cette différence de la proposée, c'est-à-dire de $M\Delta x + N\Delta u$, il vient

$$x^2 u + \frac{cx}{\Delta x} + c_2 = 0.$$

Ce qui est la primitive complète.

5. Il est préférable cependant de commencer l'intégration par le terme qui contient la plus forte puissance de Δ, en l'effectuant d'ailleurs non pas par rapport à x, mais par rapport au produit $\Delta u(x+h)$.

On se guidera dans ce cas par la formule

$$\Delta(v \, y) = v \Delta y + (\Delta y + y)\Delta v,$$

qui donne la différence totale d'un produit de deux fonctions.

D'après le premier procédé on devrait intégrer le terme $v\Delta y$, mais on peut commencer l'intégration par l'autre terme. Il est

clair que ce dernier dérive de vy par le changement simultané de v en Δv et de y eu $y+\Delta y$; donc l'intégrale particlle par rapport au produit s'obtient par le changement de Δv en v et de y en $y-\Delta y$. C'est-ce que je vais éclaircir par un exemple.

Soit $(x+1)(x+2)\Delta^3 u = 0$ la proposée, et $\Delta x = 1$.

Changeant x en $x-1$ et $\Delta^3 u$ en $\Delta^2 u$, je trouve

$$U' = x(x+1)\Delta^2 u.$$

La différence totale de ce terme étant

$$|(x+1)(x+2) - x(x+1)|\Delta^2 u + (x+1)(x+2)\Delta^3 u = \Delta U',$$

je la retranche de la proposée, et j'obtiens

$$\Delta U - \Delta U' = -2(x+1)\Delta^2 u.$$

Intégrant par le changement simultané de x en $x-1$ et de $\Delta^2 u$ en Δu, il vient

$$U'' = -2x\Delta u.$$

Retranchant la différence totale $\Delta U''$ de $\Delta U - \Delta U'$, je trouve

$$\Delta U - \Delta U' - \Delta U'' = 2\Delta u.$$

Donc la proposée est une différence exacte de la primitive

$$x(x+1)\Delta^2 u - 2x\Delta u + 2u + c = 0.$$

Appliquant le même procédé à cette dernière équation, on trouve

$$x(x-1)\Delta u - 4(x-1)u + cx + c_1 + b\Sigma u = 0,$$

c'est-à-dire que l'opération s'arrête ce qui prouve que la primitive du 1-r ordre n'est pas une différence exacte.

CHAPITRE II.

Du facteur intégrant.

6. Soit μ le facteur propre à rendre le premier membre de l'équation

$$N\Delta u + M\Delta x = 0$$

une différence exacte; admettons $\Delta x = 1$ et substituons dans

la formule (II) $N\mu$ au lieu de N et $M\mu$ au lieu de M; nous trouverons

$$\mu\left(\frac{\Delta N}{\Delta x}-\frac{\Delta M}{\Delta u}-\frac{\Delta^2 M}{\Delta u\Delta x}\right)=\frac{\Delta\mu}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^2 M}{\Delta u\Delta x}+\frac{\Delta M}{\Delta u}-N_{u,x+1}\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta\mu}{\Delta u}+\frac{\Delta^2\mu}{\Delta u\Delta x}\right)M_{u+\Delta u,\,x+1}\cdots\cdots\cdots\text{(III)}$$

Mais on a aussi

$$\Delta\mu=\frac{\Delta\mu}{\Delta x}\Delta x+\left(\frac{\Delta\mu}{\Delta u}+\frac{\Delta^2\mu}{\Delta u\Delta x}\right)\Delta u,$$

donc pour déterminer le facteur μ il faut résoudre le système suivant:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu\left(\frac{\Delta N}{\Delta x}-\frac{\Delta M}{\Delta u}-\frac{\Delta^2 M}{\Delta u\Delta x}\right)}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta^2 M}{\Delta u\Delta x}+\frac{\Delta M}{\Delta u}-N_{u,\,x+1}}=$$

$$=\frac{\Delta u}{M_{u+\Delta u,\,x+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

J'observe que $N_{u,x}=N$, $M_{u,x}=M$, c'est-à-dire que N et M sont des fonctions quelconques, données, des variables u et x, en sorte que $N=f(x,u)$, $M=\varphi(x,u)$, et, par conséquent,

$$N_{u,\,x+1}=f(x+1,u),\quad M_{u+\Delta u,\,x+1}=\varphi(x+1,u+\Delta u),\text{ etc.}$$

7. Je vais m'occuper particulièrement des équations linéaires, dont la forme générale est

$$\Delta^n u+A_x^{(n-1)}.\Delta^{n-1}u+A_x^{(n-2)}.\Delta^{n-2}u+..+A_x'\,\Delta u+A_x u=0\ldots\text{(D)}$$

Les coefficients $A_x^{(n-1)}$, $A_x^{(n-2)},\ldots A_x'$, A_x sont des fonctions quelconques de x, ou même des constantes, de façon que l'on pourrait écrire A_x au lieu de $A_x^{(n-1)}$, B_x au lieu de $A_x^{(n-2)}$, etc, c'est-à-dire que nous n'employons qu'une seule lettre A_x affectée de différents indices uniquement parce ce que nous trouvons cette notation plus commode. De plus je suppose le second membre zéro, par ce que s'il était $f(x)$, on ramenerait son intégration à celle de (D).

Je commencerai par rappeler les principales propriétés que l'on connaît.

1°. Si l'on représente par u_1, $u_2 \ldots u_n$ les n intégrales particulières de (D), la valeur générale de u sera

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

les constantes arbitraires étant sousentendues.

2°. On peut faire disparaître le 2-d, le 3-me,.... le dernier terme du premier membre de (D), ainsi que je vais le montrer sur l'équation

$$\Delta^2 u + A_x' \Delta u + A_x u = 0.$$

Remplaçant u par le produit $y \cdot v$ de deux fonctions, il viendra

$$v_{x+2} \Delta^2 y + [2v_{x+2} + (A_x' - 2)v_{x+1}] \Delta y + (\Delta^2 v + A_x' \Delta v + A_x v) y = 0.$$

Maintenant, pour faire disparaître le second terme, on déterminera v_x de l'équatiou

$$2v_{x+2} + (A_x' - 2)v_{x+1} = 0,$$

et si l'on voulait faire disparaître le dernier terme il faudrait vérifier l'équation

$$\Delta^2 v + A_x' \Delta v + A_x v = 0.$$

3°, Soit $u_2 = f(u_1)$, f étant connue; on changera u en $f(u)$ et l'ordre pourra s'abaisser.

Je prendrai pour exemple

$$x(x+1)\Delta^2 u - 2x \Delta u + 2u = 0.$$

On a ici $u_2 = u_1(x+1)$. Changeant u en $u(x+1)$, il viendra

$$x(x+1)\Delta^2 u - \frac{2x \Delta u + 2u}{x+3} = 0.$$

Retranchant de la proposée, on trouve

$$x \Delta u = u.$$

D'où $u = c_1 x$; en sorte que

$$u_1 = c_1 x, \quad u_2 = c_2 x(x+1),$$
$$u = c_1 x + c_2 x(x+1).$$

4°. Soient

$$\Delta^3 u + A_x'' \Delta^2 u + A_x' \Delta u + A_x u = 0$$
$$\Delta^2 y + B_x' \Delta y + B_x y = 0$$

deux équations dont la première est vérifiée par les deux intégrales de la dernière.

Je supposerai que la première ait pour intégrale

$$\Delta^2 u + B_x' \Delta u + B_x u = v,$$

v étant définie par l'équation

$$\Delta v + X v = 0,$$

dans laquelle X est un facteur indéterminé.

Par suite

$$\begin{vmatrix} \Delta^3 u + B'_{x+1} + X & \Delta^2 u + B'_{x+1} & \Delta u + B_{x+1} & u \\ & -B'_x & -B_x & \\ & +B_{x+1} & +B'_x . X & \\ & +X . B'_x & & \end{vmatrix} = 0.$$

Comparant les coefficients, on trouve

$$B'_{x+1} + X = A_x'',$$
$$B'_{x+1} - B_x' + B_{x+1} + X B_x' = A_x',$$
$$B_{x+1} - B_x + X B_x' = A_x .$$

La première détermine X sans intégration, et les deux autres exprimeront les conditions qui doivent être vérifiées pour que les deux proposées soient comprises dans la première.

8. Proposition 1.—Soient $u', u'', \ldots u^{(n)}$ les n intégrales de (D), et

$$D_x = \begin{vmatrix} \Delta^{n-1} u', & \Delta^{n-2} u', & \ldots\ldots & u' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \Delta^{n-1} u^{(n)}, & \Delta^{n-2} u^{(n)}, & \ldots\ldots & u^{(n)} \end{vmatrix};$$

je dis que la valeur de ce déterminant est

$$D_x = C . P^{(x)}_{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

sachant que C est une constante arbitraire,

$$P_{x-1} = (1 - A^{(n-1)}_{x-1} + A^{(n-2)}_{x-1} - \ldots + (-1)^n A_{x-1}),$$

et

$$P^{(x)}_{x-1} = P_{x-1} . P_{x-2} \ldots P_1 . P_0.$$

Démonstration.—Remplaçons les différences de u dans (D) par les valeurs successives de cette fonction, et représentons le résultat par

$$u_{x+n}+B_x^{(n)}u_{x+n-1}+B_x^{(n-1)}.u_{x+n-2}+\ldots+B_xu_x=0.$$

Alors, puisque u', u''.... désignent les n intégrales particulières de cette équation, on devra avoir

$$\begin{aligned}
&u'_{x+n}+B_x^{(n)}u'_{x+n-1}+\ldots.+B_xu'_x=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u^{(n)}_{x+n}+B_x^{(n)}u^{(n)}_{x+n-1}+\ldots+B_xu_x^{(n)}=0
\end{aligned}$$

Éliminant les coefficients $B_x^{(n)}\ldots B'_x$, nous aurons

$$B_x=\frac{1}{D_x}\begin{vmatrix} u'_{x+n-1}, & u'_{x+n-2}, \ldots\ldots\ldots & -u'_{x+n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ u^{(n)}_{x+n-1}, & u^{(n)}_{x+n-2}, \ldots & -u^{(n)}_{x+n}\end{vmatrix}.$$

Mais on a aussi

$$D_{x+1}=(-1)^n\begin{vmatrix} u'_{x+n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & -u'_{x+n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u^{(n)}_{x+n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & -u^{(n)}_{x+n}\end{vmatrix},$$

donc

$$(-1)^n.D_x\ B_x=D_{x+1},$$

$$D_x=(-1)^n\ C[B_{x-1}]^{(x)}.$$

Or, $B_x=(-1)^n(1-A_x^{(n-1}+A_x^{(n-2)}-\ldots+(-1)^nA_x)$, il s'en suit

$$D_x=CP^{(x)}_{x-1}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

9. Proposition 2.—Soient $u_1, u_2, \ldots u_n$ les n intégrales particulières de (D) et convenons d'écrire u_r', u_r'',... u_r^s au lieu des différences successives Δu_r, $\Delta^2 u_r$,.. $\Delta^s u_r$. Faisons en outre

$$\mu_x=\frac{1}{D_x}\cdot\frac{dD_x}{du_r^{n-1}},$$

sachant que D_x représente, comme dans le n° précédent, le déterminant, dont la valeur est donnée par (V), et $\frac{dD_x}{du_r^{n-1}}$ est la dérivée de ce déterminant prise par rapport à la différence $\Delta^{n-1}u_r$ d'un élément quelconque u_r, $r=1, 2, \ldots n$. Je dis que l'on aura

$$(\mu_x + \Delta\mu_x)(\Delta^n u + A_x^{(n-1)}\Delta^{n-1}u + \ldots + A_x u) = \textit{différence exacte},$$

ou que μ_{x+1} *sera le facteur intégrant de la proposée*, et

$$\frac{1}{D_x}\left\{\frac{dD}{du_r^{n-1}}\cdot\Delta^{n-1}u + \frac{dD}{du_r^{n-2}}\cdot\Delta^{n-2}u + \ldots + \frac{dD}{du'_r}\Delta u + \frac{dD}{du_r}u\right\} = c_r \ldots\ldots \quad \ldots(VI)$$

sera la terme général de toutes les n intégrales premières de cette équation, c'est-à-dire de (D).

Démonstration.— Après avoir multiplié (VI) par D_x faisons dans le résultat $r = 1, 2, \ldots n$; nous aurons les n équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dD}{du_1^{n-1}}\cdot\Delta^{n-1}u + \frac{dD}{du_1^{n-2}}\cdot\Delta^{n-2}u + \ldots + \frac{dD}{du_1}u = c_1 D_x\\
&\frac{dD}{du_2^{n-1}}\Delta^{n-1}u + \frac{dD}{du_2^{n-2}}\cdot\Delta^{n-2}u + \ldots + \frac{dD}{du_2}u = c_2 D_x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dD}{du_n^{n-1}}\cdot\Delta^{n-1}u + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{dD}{du_n}u = c_n D_x
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots(VI')$$

Éliminant les différences de u, c'est-à-dire $\Delta^{n-1}u$, $\Delta^{n-2}u$, $\ldots \Delta u$, on trouve, en vertu des principes connus de la théorie des déterminants,

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n;$$

ce qui est la valeur générale de u. Donc (VI) est le terme général des n intégrales premières de (D), et si l'on prend la différence de (VI) on devra arriver à la proposée, ce qui ne peut

avoir lieu que si μ_{x+1}, ou $\frac{1}{D_{x+1}} \cdot \frac{dD_{x+1}}{du_r^{n-}}$, est le facteur intégrant de cette équation.

Corollaire.— Si du système (VI') on prend arbitrairement $n-1$ équations et qu'on élimine les différences $\Delta^{n-1}u, .. \Delta^{n-2}, ... \Delta^2 u$, on arrivera à une équation du 1-r ordre linéaire. D'où il suit que si l'on donne $n-1$ intégrales particulières de (D), on connaîtra aussi l'intégrale n-ième .

De plus on voit sans démonstration que $D_x=0$ (déterminant$=0$) ferait disparaître le dernier terme de la proposée et permettrait par conséquent d'abaisser cette équation d'une unité.

10. On trouve facilement (à consulter le n 50 de la Première partie) que si μ_{x+1} est le facteur intégrant de l'équation donnée, et μ'_{x+1} le facteur de la r-ième différence de cette équation, on aura

$$\mu_{x+1} = \Delta^r \mu'_{x+r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

Appliquons cette formule à l'équation suivante

$$x(x+1)\Delta^2 u - 2x\Delta u + 2u = 0.$$

La différence de cette équation étant

$$(x+2)(x+1)\Delta^3 u = 0,$$

il est évident que le facteur de cette dernière est

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} :$$

en vertu de la formule (VII) $\Delta \frac{1}{x(x+1)}$ doit être la facteur intégrant de la proposée. On trouve en effet qu'elle devient la différence exacte de

$$\frac{\Delta u}{x+1} - \frac{u}{x(x+1)} = c,$$

et cette première intégrale est la dérivée exacte de

$$\frac{u}{x} = cx + c_1 .$$

J'ai trouvé aussi (T. I „Recueil Mathématique“) que $U=0$ étant une équation différentielle à deux variables et d'un ordre quelconque, si l'on représente par $U^{(r)}=0$ la dérivée r-ième de cette équation et par μ_r le facteur intégrant de cette dérivée, on aura toujours

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_r}\right)\int \mu_r U^{(r)} dx = \text{dérivée exacte.}$$

Pour les équations aux différences ce nouveau facteur sera

$$\Delta\left(\frac{1}{\mu'_x}\right) \quad \text{(VIII)}$$

On a trouvé, par exemple, que la différence

$$(x+1)(x+2)\Delta^3 u=0$$

de l'équation

$$x(x+1)\Delta^2 u - 2x\Delta u + 2u = 0$$

devient

$$\Delta^3 u = 0;$$

je prendrai l'intégrale de cette dernière,

$$\Delta^2 u = c_2,$$

et je trouverai d'après la formule (VIII) qu'elle a pour facteur

$$\Delta[x(x+1)] = 2(x+1),$$

ou simplement

$$x+1.$$

En effet, l'intégrale de la différence exacte

$$(x+1)\Delta^2 u = c_2(x+1)$$

est

$$x\Delta u - u = \frac{c_2}{2}x(x+1) + c_3.$$

En vertu de la même formule le facteur intégrant de cette dernière doit être

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+1)};$$

et effectivement l'équation

$$\frac{\Delta u}{x+1} - \frac{u}{x(x+1)} = \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{x(x+1)}$$

est immédiatement intégrable.

Prenons pour dernier exemple l'équation linéaire du 1-r ordre

$$\frac{\Delta u}{A_x - 1} - u = 0,$$

et posons pour abréger

$$A_x^{(x+1)} = A_x . A_{x-1} \ldots A_0 :$$

le facteur de la différence de la proposée sera

$$\frac{1}{A_x^{(x+1)}},$$

et cette différence multipliée par ce facteur sera immédiatement intégrable et fournira

$$\frac{\Delta u}{A^{(x)}_{x-1}(A_x - 1)} = c.$$

On pourrait éliminer Δu de la proposée et trouver ainsi la primitive de cette dernière, mais on peut aussi trouver à l'aide de la formule (VIII) le facteur intégrant de

$$\frac{\Delta u}{A^{(x)}_{x-1}(A_x - 1)} = c.$$

Cette formule donne

$$A^{(x)}_{x-1}(A_{x-1})$$

pour la valeur de ce facteur. Par suite, en vertu de l'autre formule, le facteur de la proposée doit être $\Delta\left(\frac{1}{A^{(x)}_{x-1}}\right)$.

CHAPITRE III.

Nouvelle propriété des équations linéaires aux différences. — Méthode symbolique.

11. La nouvelle propriété dont il s'agit consiste en ceci que l'intégrale générale de l'équation linéaire de l'ordre n sera connue si l'on donne une seule intégrale particulière d'une certaine équation non-linéaire d'ordre $2(n-1)$, et cette intégrale particulière sera connue à son tour dès que l'on connaîtra deux intégrales particulières de la proposée; car, ainsi que je l'ai déjà expliqué à l'égard des équations différentielles, l'intégrale particulière de l'équation non-linéaire n'est autre chose que la différence du quotient de deux intégrales de l'équation linéaire, c'est-à-dire $\Delta \frac{u''_x}{u'_x}$, sachant que u'_x et u''_x représentent les deux intégrales de la proposée.

Pour rendre la démonstration plus sensible, considérons l'équation du 3-me ordre

$$u_{x+3} + A_x u_{x+2} + B_x u_{x+1} + E_x u_x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

En appelant toujours u_x', u_x'', u_x''' les intégrales de cette équation, faisons

$$u_x'' = u_x' \Sigma v_x ;$$

nous en tirerons

$$u''_{x+1} = u'_{x+1}(v_x + \Sigma v_x)$$
$$u''_{x+2} = u''_{x+2}(v_{x+1} + v_x + \Sigma v_x)$$
$$u''_{x+3} = u''_{x+3}(v_{x+2} + v_{x+1} + v_x + \Sigma v_x).$$

Substituant ces valeurs et celle de u_x'' dans l'équation

$$u^{(r)}_{x+3} + A_x u^{(r)}_{x+2} + B_x u^{(r)}_{x+1} + E_x u^{(r)}_x = 0 \ldots\ldots\ldots (D^{(r)})$$

qui a lieu pour $r = 1, 2, 3$, et posant pour abréger

$$P_x = v_x + v_{x+1} + v_{x+2},$$

on aura, en vertu de

$$u'_{x+3}+A_x u'_{x+2}+B_x u'_{x+1}+E_x u'_x=0,$$

$$u'_{x+3}P_x+A_x(P_x-v_{x+2})u'_{x+2}+B_x v_x u'_{x+1}=0,$$

et par conséquent aussi

$$P_{x-1}\cdot u'_{x+2}+A_{x-1}(P_{x-1}-v_{x+1})u'_{x+1}+B_{x-1}v_{x-1}\cdot u'_x=0.$$

Éliminant de ces trois dernières équations u'_{x+3} et u'_{x+2}, il vient

$$[A_x\cdot A_{x-1}(P_{x-1}-v_{x+1})v_{x+2}-B_x(P_x-v_x)\cdot P_{x-1}]u'_{x+1}$$
$$=[E_x\cdot P_x\cdot P_{x-1}-A_x\cdot B_{x-1}\cdot v_{x+2}\cdot v_{x-1}]u'_x.$$

Et si l'on fait pour abréger

$$\frac{(E_x\cdot P\cdot P_{x-1}-A_xB_{x-1}\cdot v_{x+2}v_{x-1})}{A_xA_{x-1}(P_{x-1}-v_{x+1})v_{x+2}-B_x(P_x-v_x)\cdot P_{x-1}}=N_x,$$

il viendra

$$u'_x=c_1\cdot N^{(x)}_{x-1}.$$

$N^{(x)}_{x-1}$ représente, comme toujours, la fonction factorielle

$$N_{x-1}\cdot N_{x-2}\ldots N_i.$$

Substituant cette valeur de u'_x et celles de u'_{x+1}, u'_{x+2}, u'_{x+3} dans $(D^{(r)})$ on aura toute réduction faite

$$N_{x+2}N_{x+1}N_x+A_xN_{x+1}N_x+B_xN_x+E_x=0. \quad \ldots\ldots(R)$$

Il reste maintenant à restaurer les valeurs de P_{x-1}, P_x dans l'expression qui détermine N_x, après quoi les valeurs de N_x, N_{x+1} et N_{x+2} dans (R); il en résultera une équation en v qui sera du 4-me ordre, et fournira, comme j'ai dit à l'aide d'une seule valeur particulière quelconque, soit $v_x=v'_x$, l'intégrale générale de l'équation proposée. En effet, la valeur de v'_x étant donnée, on aura d'abord celle de u'_x, car $u'_x=c_1N^{(x)}_{x-1}$, puis celle de u''_x, car $u''_x=u'_x\Sigma v'_x$, et enfin, en vertu du corollaire (n° 9), la valeur de u'''_x.

12. Il est cependant beaucoup plus simple d'énoncer et de démontrer notre proposition à l'aide de la méthode symbolique.

Soit D le symbole du changement de x en $x+\Delta x$, $\Delta x = 1$, de façon que

$$Du_x = u_{x+1} = u_x + \Delta u_x = (1+\Delta)u_x,$$

et cherchons d'abord à réduire l'équation du 3-me ordre

$$u_{x+3} + A_x u_{x+2} + B_x u_{x+1} + E_x u_x = 0$$

à la forme symbolique.

Pour cet effet je supposerai que cette équation dérive de

$$u_{x+1} + \alpha_x u_x = f(x, c_1, c_2)$$

à l'aide de l'opération représentée par D combinée avec l'élimination des deux constantes c_1, c_2 comprises dans la fonction inconnue $f(x, c_1, c_2)$.

Changeant x en $x+1$, ou, plus simplement, multipliant (symboliquement) la primitive par D, il vient

$$u_{x+2} + \alpha_{x+1} u_{x+1} = f(x+1, c_1, c_2).$$

Ajoutant ces deux équations après avoir multiplié la première par un facteur indéterminé β_x, on aura

$$u_{x+2} + (\alpha_{x+1} + \beta_x)u_{x+1} + \alpha_x \beta_x u_x = f_{x+1} + \beta_x f_x.$$

On a écrit pour abréger f_x au lieu de $f(x, c_1, c_2)$, et f_{x+1} au lieu de $f(x+1, c_1, c_2)$.

Or, la primitive n'étant autre chose que

$$(D+\alpha_x)u_x = f_x,$$

la dernière devra s'écrire

$$(D+\beta_x)(D+\alpha_x)u_x = (D+\beta_x)f_x,$$

et l'équation symbolique

$$(D+\gamma_x)(D+\beta_x)(D+\alpha_x)u_x = (D+\gamma_x)(D+\beta_x)f_x$$

représentera

$$u_{x+3} + (\alpha_{x+2} + \beta_{x+1} + \gamma_x)u_{x+2} + (\alpha_{x+1}\beta_{x+1} + \gamma_x\alpha_{x+1} + \gamma_x\beta_x)u_{x+1}$$
$$+ \alpha_x\beta_x\gamma_x u_x = f_{x+2} + (\beta_{x+1} + \gamma_x)f_{x+1} + \beta_x\gamma_x f_x.$$

Maintenant, puisque nous admettons que le premier membre de cette dernière équation reproduit celui de la proposée, on doit avoir

$$f_{x+2}+(\beta_{x+1}+\gamma_x)f_{x+1}+\beta_x\gamma_x f_x=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{x+2}+\beta_{x+1}+\gamma_x=A_x \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{x+1}\beta_{x+1}+\gamma_x(\alpha_{x+1}+\beta_x)=B_x \ldots \\ \alpha_x\beta_x\gamma_x=E_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

13. Cela posé, j'énoncerai ma proposition des deux manières suivantes:

1°. *Si l'on donne soit la valeur de* β_x, *soit celle de* γ_x, *on connaîtra aussi les valeurs des deux autres racines (symboliques) de l'équation*

$$(D+\gamma_x)(D+\beta_x)(D+\alpha_x)u_x=0,$$

et, par suite, *la valeur générale de* u_x, *c'est-à-dire l'intégrale générale de l'équation donnée.*

2°. *Les inconnues* α_x et γ_x *sont exprimables en fonction de* β_x *et des coefficients donnés; de plus on y parvient sans intégration: donc si la valeur de* β_x *est donnée, on trouvera aussi la valeur générale de* u_x. On peut d'ailleurs changer β_x en γ_x, c'est-à-dire exprimer α_x et β_x en fonction de γ_x. *Mais* α_x *n'entre pas dans les données de la question,* attendu que $(-1)^x\alpha^{(x)}_{x-1}$ est une intégrale particulière de la proposée *).

Cette proposition est basée sur les relations (I) qui subsistent quel que soit l'ordre de l'équation donnée et qui permettent d'éliminer sans intégration toutes les racines (symboliques) une seule excepté. Naturellement pour n différent de 3 le nombre des équations (I) ne sera plus trois, mais n. Il s'agit donc simplement de montrer comment s'effectue la dite élimination, c'est-ce que je vais faire en me servant du système (I).

14. On tire de la dernière de ces équations

$$\gamma_x=\frac{E_x}{\alpha_x\beta_x}.$$

*) Cette remarque concernant α_x s'étend d'elle-même sur les équations différentielles.

Substituant cette valeur de γ_x dans les deux autres équations, on aura

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_x\alpha_{x+2}\beta_x+\alpha_x\beta_x(\beta_{x+1}-A_x)+E_x=0,\ldots\\&\alpha_x^{(2)}.\beta_x^{(2)}+\alpha_{x+1}.E_x-\alpha_x\beta_xB_x+\beta_xE_x=0,..\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

où $\alpha_x^{(2)}=\alpha_x\ \alpha_{x+1}$, et, en général, une expression de la forme $\alpha^{(r)}_{x+i}$ représentera la factorielle

$$\alpha_{x+i}.\alpha_{x+i+1}\ldots\alpha_{x+i+r-1},$$

tant qu'il s'agira de l'élimination.

A l'aide de l'équation

$$\alpha^{(2)}_{x+1}.\beta^{(2)}_{x+1}+\alpha_{x+2}.E_{x+1}-\alpha_{x+1}.\beta_{x+1}.B_{x+1}+\beta_{x+1}\ E_{x+1}=0$$

et du système (2) on éliminera α_{x+2} et α_{x+1}, il en résultera

$$\alpha^2_x\ \beta^2_x.\beta_{x+1}.B_x(P_x-Q_x)+\alpha_x\ \beta_x\ E_x[B_xP_x-Q_x\beta^{(2)}_x+R_x.\beta_{x+1}]$$
$$+E_x^2.R_x=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

où
$$P_x=\beta^{(2)}_{x+1}-A_x\beta_xE_{x+1}$$
$$Q_x=B_{x+1}-A_x\beta_{x+2}$$
$$R_x=E_{x+1}-\beta_x^{(3)}.$$

J'observe encore que $\beta_x^2=\beta_x.\beta_x$, tandis que $\beta_x^{(2)}=\beta_x.\beta_{x+1}$, et ainsi de suite.

L'équation (II) détermine la valeur de α_x en fonction de β et des quantités données. Supposant donc β_x connue,, on aura les valeurs des deux autres inconnues sans intégration.

Après cela l'équation

$$(D+\gamma_x)(D+\beta_x)f_x=0$$

donnera

$$f_x=(-1)^x.\beta^{(x)}_{x-1}\left[c_2-c_1\Sigma\frac{\gamma^{(x)}_{x-1}}{\beta_x^{(x+1)}}\right],$$

et de

$$u_{x+1}+\alpha_x.u_x=f_x$$

on tirera

$$u_x=(-1)^x.\alpha^{(x)}_{x-1}\left[c_3+\Sigma\frac{(-1)^{x+1}.f_x}{\alpha_x^{(x+1)}}\right].$$

Les factorielles $\alpha^{(x)}{}_{x-1}$, $\gamma^{(x)}{}_{x-1}$, $\alpha^{(x)}{}_{x-1}$ sont toutes décroissantes, et c_1, c_2, c_3, désignent, comme toujours, les constantes arbitraires.

15. Pour trouver l'équation en β il faudrait substituer la valeur de α_x, tirée de (II), dans l'une des deux équations (2); mais ce n'est pas là l'usage qu'il convienne de faire de ma proposition. En effet, puisque l'on n'a absolument pas de données pour découvrir la valeur particulière de β_x, il vaut mieux attribuer à cette fonction des valeurs arbitraires et chercher ensuite la condition que doivent vérifier les coefficients A_x, B_x, E_x.

Soit, par exemple, $B_x = x(x+1)$, $E_x = x^2(x+1)$ et $\beta_x = (-1)^x . x$; on trouvera sans peine que (II) et vérifiée par $\alpha_x = x$, si l'on prend $A_x = x+2$: par suite $\gamma = (-1)^x(x+1)$.

J'ai déjà dit (Equat: différentielles n° 38) que ma proposition ramène le problème d'intégration de l'équation linéaire de l'ordre n à la recherche de deux intégrales particulières de cette équation; j'ajouterai encore que, en vertu de la même proposition, l'équation de l'ordre n se ramène à l'équation du 2-d ordre également linéaire. En effet soit

$$(D-\alpha_x^{(n-1)})(D-\alpha_x^{(n-2)})\ldots.(D-\alpha_x)u_x = 0$$

la proposée: je ferai

$$(D-\alpha_x^{(n-3)})\ldots.(D-\alpha_x)u_x = v_x,$$

et j'aurai

$$(D-\alpha_x^{(n-1)})(D-\alpha_x^{(n-2)})v_x = 0.$$

Les racines $\alpha_x^{(n-1)}$, $\alpha_x^{(n-3)}, \ldots \alpha_x$ étant toutes exprimables en fonction de $\alpha_x^{(n-2)}$, il s'en suit que cette dernière fonction sera la seule inconnue du problème, en sorte que si sa valeur était donnée, on trouverait immédiatement v_x et u_x.

16. On voit qu'ici encore l'état présent de l'analyse est défini par l'équation linéaire du 2-d ordre; c'est-à-dire que la limite que l'on ne sait pas franchir est dans cette seule intégrale particulière dont dépend la solution générale de l'équation linéaire du 2-d ordre; dès que l'on saura trouver la solution particulière de cette dernière équation, on pourra intégrer aussi toute équa-

tion linéaire et même une classe nombreuse d'équations non-linéaires, nommément celle où les coefficients sont des fonctions entières par rapport à la variable dépendante.

L'intégration de l'équation du 2-d ordre

$$u_{x+2}+A_x\ u_{x+1}+B_x\ u_x=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (D_1)$$

peut être ramenée à son tour au *problème d'interprétation des expressions symboliques.*

En écrivant (D_1) sous la forme binomiale

$$(D-\beta_x)(D+\alpha_x)u_x+(D-\alpha_x)(D+\beta_x)u_x=0,$$

on pourra trouver les valeurs des racines (symboliques); car

$$\begin{aligned} &D^2u_x+(\alpha_{x+1}-\beta_x)Du_x-\alpha_x\beta_xu_x+\\ &+D^2u_x+(\beta_{x+1}-\alpha_x)Du_x-\alpha_x\beta_xu_x=0,\\ &2u_{x+2}+u_{x+1}\Delta(\beta_x+\alpha_x)-2\alpha_x\beta_xu_x=0,\\ &u_{x+2}+\frac{u_{x+1}}{2}\Delta(\beta_x+\alpha_x)-\alpha_x\beta_xu_x=0; \end{aligned}$$

donc

$$\Delta(\beta_x+\alpha_x)=2A_x$$

$$\alpha_x\beta_x=-B_x.$$

On tire de la première

$$\beta_x+\alpha_x=2\Sigma A_x.$$

Éliminant β_x, il vient

$$\alpha^2{}_x=2\alpha_x\Sigma A_x+B_x.$$

D'où

$$\alpha_x=\Sigma A_x\pm\sqrt{(\Sigma A_x)^2+B_x},$$

$$\beta_x=\Sigma A_x\mp\sqrt{(\Sigma A_x)^2+B_x}.$$

On s'aperçoit facilement que (D_1) sera intégrable toutes les fois qu'aura lieu la relation

$$(\Sigma A_x)^2+B_x=0,$$

et, cela s'entend, qu'une constante peut être ajoutée à ΣA_x, de façon que la condition peut s'exprimer par l'équation

$$(a+\Sigma A_x)^2+B_x=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (F_1).$$

Soit, par exemple,

$$A_x = bx + c;$$

il viendra

$$-[a + \frac{b}{2} x(x-1) + cx]^2 = B_x .$$

Faisant ensuite $\frac{b}{2} = b_1$, $\frac{b}{2} - c = c_1$, et changeant B_x en $-B_x$, l'équation que l'on pourra intégrer s'écrira de la manière suivante

$$u_{x+2} + (2b_1 x + b_1 - c_1) u_{x+1} + (a - c_1 x + b_1 x^2)^2 u_x = 0.$$

CHAPITRE IV.

Des intégrales particulières.

17. Il n'existe à proprement parler qu'une seule méthode pour trouver les solutions particulières; elle consiste à chercher non pas les solutions elles-mêmes, mais les conditions qui doivent avoir lieu entre les quantités données afin que ces solutions puissent être trouvées. De cette manière le problème se transforme et les difficultés changent de nature. Il s'agit de découvrir le procédé qui ait la propriété de fournir le plus grand nombre de formules d'intégrabilité. C'est ce que je vais faire, en appliquant tour à tour chacun des procédés connus à l'équation linéaire du 2-d ordre

$$u_{x+2} + A_x u_{x+1} + B_x u_x = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D_1)$$

ou bien à celle-ci

$$v_x v_{x+1} + A v_x + B_x = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D_1')$$

Cette dernière devient (D_1) quand on change v_x en $\frac{u_{x+1}}{u_x}$.

18. Il convient d'abord de citer les deux cas compris dans les équations

$$u_{x+n}+A_1f(x)u_{x+n-1}+A_2f(x)f(x-1)u_{x+n-2}+\ldots=X.\ldots(d_1)$$

$$x^{(n)}\Delta^n u+A_1x^{(n-1)}\Delta^{n-1}u+\ldots+A_nu=X,\ldots\ldots\ldots(d_2)$$

$A_1\ldots A_n$ étant des constantes, X une fonction quelconque de x, et $x^{(n)}$, $x^{(n-1)}$..... des factorielles croissantes, donc $x^{(n)}=x(x+1)..(x+n-1)$.

La première de ces deux formes change en

$$v_{x+n}+A_1v_{x+n-1}+A_2v_{x+n-2}+\ldots=\frac{X}{f(x)f(x-1)..f(1)},$$

à l'aide de la substitution

$$u_x=f(x-n)f(x-n-1).\ f(1).v_x.$$

Quant à la dernière forme, sa solution est basée sur la propriété de la factorielle croissante

$$x^{(m)}=x(x+1)\ldots(x+m-1)$$

de fournir

$$\Delta x^{(m)}=m(x+1)^{(m-1)},\quad \Delta^2x^{(m)}=m(m-1)(x+2)^{(m-2)},\ldots$$

$$\Delta^r x^{(m)}=m(m-1)..(m-r+1)(x+r)^{(m-r)}.$$

En effet, si l'on substitue

$$x^{(m)}.v_x$$

au lieu de u_x dans (d_2), le dernier terme du premier membre sera

$$x^{(m)}.v_x(m^{(n)}+A_1m^{(n-1)}+A_2m^{(n-2)}+\ldots+A_n),$$

la factorielle $m^{(n)}$ étant décroissante. D'où l'on voit que (d_2) s'abaissera d'autant d'unités qu'il y aura de nombres entiers parmis les racines de l'équation

$$m^{(n)}+A_1m^{(n-1)}+\ldots+A_n=0.$$

On trouverait même la solution générale de la proposée si cette dernière équation avait toutes ses n racines inégales et réelles, l'indice m pouvant être quelconque.

Exemple. — Soit

$$x(x+1)\Delta^2 u + A_1 x \Delta u + A_2 u = 0$$

la proposée.

Faisant $u = x^{(m)} . v_x$, il vient

$$\Delta u = (x+1)^{(m)} \Delta v + m(x+1)^{(m-1)} v$$

$$\Delta^2 u = (x+2)^{(m)} \Delta^2 v + 2m(x+2)^{(m-1)} \Delta v + m(m-1)(x+2)^{(m-2)} v.$$

Substituant ces valeurs de u, Δu, $\Delta^2 u$ dans l'équation donnée, on aura

$$x(x+1)(x+2)^{(m)} \Delta^2 v + [2mx(x+1)(x+2)^{(m-1)} + A_1 x(x+1)^{(m)}] \Delta v$$

$$+ x^{(m)} v . [m(m-1) + A_1 m + A_2] = 0.$$

Posant

$$m(m-1) + A_1 m + A_2 = 0,$$

il vient

$$m = \frac{1 - A_1 \pm \sqrt{1 + A_1^2 - 2A_1 - 4A_2}}{2}.$$

Les deux racines fournissent de cette manière les deux intégrales particulières.

Symboliquement la solution s'obtient plus simplement.

On écrira d'abord

$$x^{(2)} \Delta^2 u + A_1 x \Delta u + A_2 u = 0,$$

ce qui fera voir que la forme symbolique peut être celle-ci

$$(x\Delta + a)(x\Delta + b)u = 0,$$

a et b étant des constantes.

En effet, puisque

$$(x\Delta + b)u = x\Delta u + bu,$$

$$(x\Delta + a)(x\Delta u + bu) = x^{(2)} \Delta^2 u + x(1 + a + b) \Delta u + abu,$$

on doit avoir

$$1 + a + b = A_1, \quad ab = A_2.$$

D'où

$$a = \frac{A_1 - 1 \pm \sqrt{(A_1-1)^2 - 4A_2}}{2}$$

$$b = \frac{A_1 - 1 \mp \sqrt{(A_1-1)^2 - 4A_2}}{2},$$

et l'intégration successive des équations

$$(x\Delta + a)v = 0, \quad (x\Delta + b)u = v$$

fournira l'intégrale générale.

19. Prenons maintenant en considération l'équation générale

$$\Delta^2 u + A_x \Delta u + B_x u = 0,$$

et cherchons une autre équation du même ordre dans le but d'obtenir l'intégrale générale par l'élimination des différences.

Pour cet effet, après avoir pris la différence

$$\Delta^3 u + A_{x+1}\Delta^2 u + (\Delta A_x + B_{x+1})\Delta u + u\Delta B_x = 0,$$

j'intégrerai les équations simultanées suivantes

$$\Delta u = p$$

$$\Delta p = -A_x p - B_x u$$

$$\Delta^2 p = -A_{x+1}\Delta p - (\Delta A_x + B_{x+1})p - u\Delta B_x.$$

Si l'on multiplie ces équations, la dernière par α_{x+1}, la seconde par β_{x+1}, la première par γ_{x+1}, et qu'on les ajoute ensuite, nous aurons

$$\alpha_{x+1}\Delta^2 p + \beta_{x+1}\Delta p + \gamma_{x+1}\Delta u = -\alpha_{x+1}A_{x+1}\Delta p +$$
$$+ [\gamma_{x+1} - A_x\beta_{x+1} - (\Delta A_x + B_{x+1})\alpha_{x+1}]p - u[\beta_{x+1}B_x + \alpha_{x+1}\Delta B_x],$$

ou

$$\Delta(\alpha_x\Delta p + \beta_x p + \gamma_x u) = (\Delta\alpha_x - \alpha_{x+1}A_{x+1})\Delta p +$$
$$+ [\Delta\beta_x + \gamma_{x+1} - A_x\beta_{x+1} - (\Delta A_x + B_{x+1})\alpha_{x+1}]p +$$
$$+ u[\Delta\gamma_x - \beta_{x+1}B_x - \alpha_{x+1}\Delta B_x].$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\alpha_x - \alpha_{x+1}A_{x+1} = P_x\alpha_x \\ &\Delta\beta_x + \gamma_{x+1} - A_x\beta_{x+1} - (\Delta A_x + B_{x+1})\alpha_{x+1} = P_x\beta_x \\ &\Delta\gamma_x - \beta_{x+1}\cdot B_x - \alpha_{x+1}\cdot\Delta B_x = P_x\gamma_x, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

P_x étant une fonction indéterminée; il viendra

$$\alpha_x \Delta p + \beta_x p + \gamma_x u = C(P_{x-1}+1)^{(x)},$$

ou

$$\alpha_x \Delta^2 u + \beta_x \Delta u + \gamma_x u = C(P_{x-1}+1)^{(x)}.$$

Éliminant $\Delta^2 u$ à l'aide de la proposée, on trouve

$$(\beta_x - \alpha_x A_x)\Delta u + (\gamma_x - \alpha_x B_x)u = C(P_{x-1}+1)^{(x)}.$$

C est une constante arbitraire et $(P_{x-1}+1)^{(x)}$ la factorielle

$$(P_{x-1}+1)(P_{x-2}+1)\ldots(P_0+1).$$

Il s'agit, comme on voit, de trouver une solution particulière du système (1).

La première de ces équations donne

$$\alpha_x = \alpha_0 \, Q^{(x)}{}_{x-1},$$

α_0 étant une constante qnelconque et

$$Q_x = \frac{P_x+1}{1-A_{x+1}},$$

$$Q^{(x)}{}_{x-1} = Q_{x-1} \cdot Q_{x-2} \ldots Q_0.$$

Éliminant ensuite α_x et β_x des deux autres équations (1), il vient

$$\beta_x = \frac{\gamma_x}{B_{x-1}} - \frac{\gamma_{x-1}}{B_{x-1}}(P_{x-1}+1) - \frac{\Delta B_{x-1}}{B_{x-1}} \cdot \alpha_0 \cdot Q^{(x)}{}_{x-1},$$

$$(1-A_{x+1}+B_{x+1})\gamma_{x+2} - \left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)(1-A_{x+2})\gamma_{x+1} \cdot Q_{x+1} \ldots (2)$$

$$+ Q_x Q_{x+1}(1-A_{x+1})(1-A_{x+2})\frac{B_{x+1}}{B_x} \cdot \gamma_x$$

$$= \alpha_0 Q_{x+1}{}^{(x+2)}\left[B_x + \Delta \frac{B_x}{B_{x+1}}(A_{x+1}-1)\right]\frac{B_{x+2}B_{x+1}}{B_x}.$$

Cette équation est satisfaite par la valeur

$$\gamma_x = \alpha_0 B_x Q^{(x)}{}_{x-1},$$

mais cette intégrale correspond à $C = 0$ et ne fournit pas la solution requise.

Si donc on prend

$$\gamma_x = B_x Q^{(x)}{}_{x-1},$$

α_0 étant différente de 1, on trouvera la relation

$$B_x + \Delta \frac{B_x}{B_{x+1}} (A_{x+1} - 1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (F_2)$$

Toutes les fois quelle aura lieu l'intégration s'chèvera.

On remarque en outre la condition

$$1 - A_{x+1} + B_{x+1} = 0,$$

déjà citée (chapitre II, corollaire), puis celle-ci

$$1 - A_{x+1} + \frac{B_{x+1}}{B_x} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_3)$$

car l'équation en γ devient de la forme

$$\gamma_{x+2} = X_x \gamma_x + X_x',$$

et s'intègre en prenant d'abord $X_x' = 0$,

$$\gamma_x = X_{x-2} \cdot \gamma_{x-2}$$

$$\gamma_{x-2} = X_{x-4}\, \gamma_{x-4},$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_x = k X_{x-2}\ X_{x-2}\ X_{x-6} \ \ldots\ldots,$$

etc.

L'équation (2) devient intégrable si l'on a en même temps

$$Q_{x+1}(1 - A_{x+2})\left(1 - A_{x+1} + \frac{B_{x+1}}{B_x}\right) = b(1 - A_{x+1} + B_{x+1})$$

$$Q_x\, Q_{x+1}(1 - A_{x+1})(1 - A_{x+2})\, \frac{B_{x+1}}{B_x} = a(1 - A_{x+1} + B_{x+1}),$$

a et b étant des constantes quelconques; car il vient

$$\gamma_{x+2} - b\gamma_{x+1} + a\gamma_x = \frac{\alpha_0 Q_{x+1}^{(x+2)}}{1 - A_{x+1} + B_{x+1}} \left[B_x + \Delta \frac{B_x}{B_{x+1}} (A_{x+1} - 1)\right] \frac{B_{x+2} B_{x+1}}{B_x}.$$

La première des conditions prescrites donne

$$Q_{x+1} = \frac{b(1-A_{x+1}+B_{x+1})}{(1-A_{x+2})\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)},$$

après quoi la seconde fournira

$$a\left(1-A_x+\frac{B_x}{B_{x+1}}\right)\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right) = b^2(1-A_x+B_x)\frac{B_{x+1}}{B_x}\ldots \quad (F_4)$$

Enfin deux autres moyens se présentent pour trouver les cas d'intégrabilité de (2). Le premier consiste à remplacer γ_{x+2} par $\Delta^2\gamma_x+2\Delta\gamma_x+\gamma_x$, et γ_{x+1} par $\gamma_x+\Delta\gamma_x$; effectuant ces substitutions, on égalera le coefficient de γ_x à zéro; ce qui donnera

$$1-A_{x+1}+B_{x+1}-\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)(1-A_{x+2})Q_{x+1}+$$

$$+(1-A_{x+1})(1-A_{x+2})\frac{B_{x+1}}{B_x}Q_x Q_{x+1}=0.$$

D'où résulte la condition

$$1-A_{x+1}+B_{x+1}-\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+2}}{B_x}\right)(1-A_{x+2})+$$

$$+(1-A_{x+1})(1-A_{x+2})\frac{B_{x+1}}{B_x}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (F_5)$$

Le second moyen consiste à appliquer à (2) la formule (F_1) du n° 16. Elle donne

$$\left[\Sigma\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)\frac{(1-A_{x+2})Q_{x+1}}{1-A_{x+1}+B_{x+1}}\right]^2=$$

$$=\frac{Q_xQ_{x+1}(1-A_{x+1})(1-A_{x+2})}{1-A_{x+1}+B_{x+1}}\cdot\frac{B_{x+1}}{B_x} \quad \ldots\ldots\ldots (F_6)$$

Si l'on pose

$$\Sigma\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)\frac{(1-A_{x+2})Q_{x+1}}{1-A_{x+1}+B_{x+1}}=q_{x+1}, \quad \ldots\ldots (3)$$

cette équation pourra se transformer en celle-ci

$$B_x\left(1-A_x+\frac{B_x}{B_{x+1}}\right)\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)(q_x+\Delta q_x)^2 =$$

$$=(1-A_x+B_x)B_{x+1}\,\Delta q_x.(\Delta q_x+\Delta^2 q_x)\ldots\ldots\ldots(F_7).$$

Attribuant à Δq_x différentes valeurs on trouvera autant de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Soit par exemple $\Delta q_x=$ constante $=a$, il viendra

$$B_x\left(1-A_x+\frac{B_x}{B_{x+1}}\right)\left(1-A_{x+1}+\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)(ax+b+a)^2=(1-A_x+B_x)B_{x+1}a^2.$$

20. Appliquons maintenant à l'équation

$$\Delta^2 u+A_x\Delta u+B_x u=0$$

la méthode de M. Bougaieff (à consulter le n° 56 I-re partie).

Éliminons entre cette équation et sa différence première

$$\Delta^3 u+A_{x+1}\Delta^2 u+(\Delta A_x+B_{x+1})\Delta u+u\Delta B_x=0$$

le dernier terme, c'est-à- dire u_x; nous aurons

$$B_x\Delta^3 u+(A_{x+1}B_x-\Delta B_x)\Delta^2 u+(B_x\Delta A_x+B_xB_{x+1}-A_x\Delta B_x)\Delta u=0..(4)$$

Il est visible qu'à l'aide des formules $(F_1)\ldots(F_7)$ on pourrait déduire de cette équation de nouvelles conditions d'intégrabilité; nous prendrons en considération celle-ci

$$B_x\Delta A_x+B_xB_{x+1}-A_x\Delta B_x=0.$$

On en tire

$$A_x=B_x(a-x),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(F_8)$$

a étant une constante.

D'où il suit que l'équation

$$\Delta^2 u+B_x(a-x)\Delta u+B_x u=0$$

est intégrable.

En effet, puisque l'équation (4) devient

$$B_x\Delta^3 u+(A_{x+1}B_x-\Delta B_x)\Delta^2 u=0,$$

on en tirera par l'intégration

$$\Delta^2 u=c_1B_x[1+B_{x-1}(x+a)]^{(x)},$$

c_1 étant une constante arbitraire et $[1+B_{x-1}(x-a)]^{(x)}$ désigne, comme toujours, une factorielle décroissante qui a $1+B_{x-1}(x-a)$ pour base.

Par l'élimination de $\Delta^2 u$ de la proposée on obtient l'équation

$$c_1[1+B_{x-1}(x-a)]^{(x)}-(x-a)\Delta u_x+u_x=0,$$

dont l'intégrale est connue.

En opérant l'élimination de Δu et u entre la proposée et les deux premières différences on arriverait à la condition

$$(2\Delta A_{x+1}+B_x+B_x.B_{x+2}-\Delta^2 B_x)(B_x\Delta A_x+B_xB_{x+1}-A_x\Delta B_x)=$$

$$=(A_{x+1}B_x-\Delta B_x)(B_x\Delta^2 A_x+2B_x\Delta B_{x+1}-A_x\Delta^2 B_x) \quad ..(F_9).$$

Et ici une remarque importante se présente d'elle-même: c'est que des formules $(F_1)\ldots(F_9)$ que nous avons obtenues, un très-petit nombre seulement est susceptible d'intégration soit par rapport à A_x, soit par rapport à B_x. D'où il suit que les cas d'intégrabilité de l'équation aux différences

$$\Delta^2 u+A_x\Delta u+B_x u=0$$

ou différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+Xy=0$$

sont incalculables et inexprimables par des formules générales. Et, si par exemple on se propose sérieusement de trouver les cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati

$$\frac{d^2y}{dx^2}=cx^ny,$$

cette prétention équivaudrait à celle d'intégrer l'équation plus générale

$$\frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+Xy=0;$$

on peut dire avec certitude que l'intégrale générale de cette équation sera trouvée avant que l'on réussisse à exprimer et à énumérer

les cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati ou d'un autre cas particulier de ce genre.

21. Pour conclure ce chapitre je vais montrer comment on peut trouver le facteur intégrant de l'équation

$$\Delta^2 u + A_x \Delta u + B_x u = 0.$$

Multipliant par μ_{x+2} et intégrant le terme $\mu_{x+2}\Delta^2 u$, il vient

$$\mu_{x+1}\Delta u = U'.$$

Je préviens que je continue à suivre la notation des chapitres I et II, en vertu de laquelle ΔU représentera $\mu_{x+2}(\Delta^2 u + A_x \Delta u + B_x u)$, et les intégrales partielles seront désignées par U', U'', etc. De plus, pour intégrer $\mu_{x+2}\Delta^2 u$ je prends en considération la formule

$$\Sigma v_{x+1}\Delta w_x = w_x . v_x - \Sigma w_x \Delta v_x .$$

Cela posé, je prends la différence totale de U',

$$\mu_{x+2}\Delta^2 u + \Delta\mu_{x+1} . \Delta u = \Delta U'$$

et je la retranche de ΔU; il vient

$$\Delta U - \Delta U' = \Delta u . (A_x \mu_{x+2} - \Delta\mu_{x+1}) + B_x \mu_{x+2} u_x .$$

Intégrant le terme en Δu, on trouve

$$U'' = u(A_{x-1}\mu_{x+1} - \Delta\mu_x),$$

puis

$$\Delta U'' = \Delta u(A_x \mu_{x+2} - \Delta\mu_{x+1}) + u_x(A_x \Delta\mu_{x+1} + A_{x-1}\cdot\mu_{x+1} - \Delta^2\mu_x),$$

$$\Delta U - \Delta U' - \Delta U'' = u_x[B_x\mu_{x+2} - A_x\Delta\mu_{x+1} - \Delta A_{x-1}\cdot\mu_{x+1} + \Delta^2\mu_x].$$

D'où l'on conclut que la condition nécessaire et suffisante pour que μ_{x+2} rende la proposée une différence exacte est comprise dans l'équation

$$B_x\mu_{x+2} - A_x\Delta\mu_{x+1} - \Delta A_{x-1}\cdot\mu_{x+1} + \Delta^2\mu_x = 0,$$

ou

$$\Delta^2\mu_x(1 - A_x + B_x) + \Delta\mu_x[2B_x - 2A_x + A_{x-1}] + \mu_x(B_x - \Delta A_{x-1}) = 0.$$

Et la valeur de ce facteur sera connue si l'on *a*

$$B_x = \Delta A_{x-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (F_{10})$$

comme cela se réalise par exemple sur l'équation

$$(ax+b)(ax+b-a)\Delta^2 u+(a_1x+b_1)(ax+b-a)\Delta u+(a_1b-ab_1)u=0,$$

a, b, a_1, b_1 étant des constantes quelconques.

Quant à l'intégrale de la proposée, on a

$$\mu_{x+1}\ \Delta u+u(A_{x-1}.\mu_{x+1}-\Delta\mu_x)=C_1,$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

NOTE I.

Sur l'intégrale générale des équations linéaires.

1. On sait que l'équation différentielle linéaire de l'ordre n est exprimable par le produit symbolique

$$(D+\alpha_n)(D+\alpha_{n-1})\ldots(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y=0; \quad \ldots\ldots (1)$$

et si toutes les α étaient données, on déduirait de cette formule par une suite de quadratures la valeur générale de la fonction y. Je vais prouver que *si l'on donne seulement une valeur particulière de α_2, par exemple $\alpha_2=0$, on trouvera sans intégration les valeurs des autres α.*

Il suffit de le démontrer à l'égard de l'équation du troisième ordre, car l'équation de l'ordre n sans second membre (1) se ramène à l'équation de l'ordre $n-1$

$$(D+\alpha_{n-1})\ldots(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y=c\,e^{-\int\alpha_n dx}$$

avec second membre, et l'intégrale de cette dernière se déduit, comme on sait, au moyen d'une intégrale multiple des trois intégrales particulières de l'équation sans second membre.

Soit donc

$$y'''+X_1y'+Xy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

l'équation donnée, et transformons-la en produit

$$(D+\alpha_3)(D+\alpha_2)(D+\alpha_1)y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Supposer que (2) se ramène à (3), c'est admettre l'existence du système

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2'+2\alpha_1'=X_1 \ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1'+\dfrac{d}{dx}(\alpha_1\alpha_2)+\alpha_1''=X \ldots\ldots\end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

En effet, on *a*

$$(D+\alpha_1)y = y' + \alpha_1 y,$$

$$(D+\alpha_2)(y' + \alpha_1 y) = y'' + (\alpha_1+\alpha_2)y' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1')y,$$

donc

$$y''' + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)y'' + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2' + 2\alpha_1')y' +$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1' + \frac{d}{dx}(\alpha_1\alpha_2) + \alpha_1'')y = 0$$

doit être identique avec la proposée, d'où résulte (4).

La première des trois équations de ce système donne la valeur de α_3 sans intégration,

$$\alpha_3 = -(\alpha_2+\alpha_1),$$

et si l'on élimine α_3 et les dérivées de α_1 des deux autres équations il vient

$$3\alpha_2\alpha_1^2 + 3(\alpha_2^2 - 2\alpha_2')\alpha_1 - 3\alpha_2\alpha_2' + 2\alpha_2'' - \alpha_2^3 - 2X_1' + 4X - X_1\alpha_2 = 0,$$

d'où l'on tire, encore sans intégration, la valeur de α_1.

Il est donc vrai que la valeur générale de y s'exprime en fonction de α_2 et des quantités données.

Exemple.—

$$y''' - \frac{3}{4}x^2y' + \frac{(x^3 - 3x)}{4}y = 0.$$

Actuellement $\alpha_2 = x$, par suite

$$\alpha_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \pm \frac{1}{x}.$$

Des deux valeurs gardons

$$\alpha_1 = -\frac{x}{2},$$

nous aurons

$$\alpha_3 = -\frac{x}{2},$$

$$y = e^{\frac{x^2}{4}}\left\{c_3 + \int e^{-\frac{3}{4}x^2}\left[c_2 + c_1\int e^{\frac{3}{4}x^2}dx\right]dx\right\},$$

c_1, c_2, c_3 désignant les trois constantes arbitraires.

Pour trouver l'équation qui détermine α_2, je fais

$$\alpha_2 + 2\alpha_1 = q,$$

et, pour abréger,

$$R = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(q' - \frac{q^2}{4} - X_1)};$$

il vient

$$\alpha_3 = \alpha_1 - q,$$

$$\alpha_1 = \frac{q}{2} + R,$$

$$R'' - \frac{3}{2}qR' - \frac{7}{2}R^3 + (X_1 + \frac{3}{4}q^2)\frac{R}{2} - X - \frac{X_1'}{2} = 0.$$

Tirant de cette équation la valeur de X et substituant-la dans la proposée, il viendra

$$y''' + X_1 y' + \left[R'' - \frac{3}{2}qR' - \frac{7}{2}R^3 + \frac{R}{2}(X_1 + \frac{3}{4}q^2) - \frac{X_1'}{2}\right]y = 0.$$

En vertu de mon théorème cette équation, avec deux fonctions arbitraires X_1 et q, s'intègre immédiatement.

En attribuant à α_2 dans l'équation de l'ordre n des valeurs déterminées, on trouvera un nombre incalculable de classes d'équations que l'on n'a pas pu intégrer jusqu'à présent et que l'on intégrera en vertu de ma proposition.

Soit par exemple

$$y^{IV} + X_2 y'' - x(2x^2+1)y' - (2x^2-1)y = 0$$

la proposée: attendu qu'elle se ramène à

$$(D+\alpha_4)(D+\alpha_3)D(D+\alpha_1)y = 0,$$

où $\alpha_2 = 0$, il vient

$$\alpha_3 = \alpha_1 = x, \quad X_2 = 4 - 3x^2, \quad \alpha_4 = -2x,$$

$$y = e^{\frac{-x^2}{2}}\left\{c_4 + \int e^{\frac{x^2}{2}}[c_3 + \int e^{\frac{-x^2}{2}}(c_2 + c_1\int e^{\frac{3x^2}{2}}dx)dx]dx\right\}.$$

2. On va comprendre d'où vient la propriété que possède la valeur de α_2 de fournir l'intégrale générale de la proposée. La raison en est que $e^{\int \alpha_2 dx}$ est le facteur intégrant de l'équation du second ordre à laquelle se ramène la proposée.

Théorème.— Soit toujours

$$y''' + X_1 y' + Xy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

la proposée; désignons par M la facteur de cette équation, et par M_1 celui de l'intégrale première de (2), sachant d'ailleurs que M et M_1 ne dépendent que de la seule variable x: je dis que *si l'on donne une valeur particulière de* M_1, *on trouvera aussi l'intégrale générale de la proposée.*

Démonstration.—La formule d'Euler donne

$$M''' + X_1 M' + (X_1' - X)M = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

et en vertu de cette équation le premier membre de la proposée multiplié par M devient une dérivée exacte; par suite l'intégrale première de (2) sera

$$My'' - M'y' + (M'' + X_1 M)y = c_1, \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

c_1 désignant une constante arbitraire.

Pour le faire voir, prenons la dérivée de (*a*); nous aurons

$$My''' + X_1 My' + (M''' + X_1 M' + X_1' M)y = 0.$$

Mais

$$M''' + X_1 M' + X_1' M = XM,$$

donc

$$M(y''' + X_1 y' + Xy) = 0.$$

Ce qui est la proposée multipliée par M.

De même M_1, qui par hypothèse est le facteur de (*a*), doit être tel que l'on ait, d'après la formule d'Euler,

$$3M_1 M'' + 3M_1' M' + (M_1'' + M_1 X_1)M = 0, \ldots\ldots\ldots (b')$$

et à cette condition l'intégrale seconde de la proposée sera

$$MM_1 y' - (2M_1 M' + MM_1')y = c_2 + c_1 \int M_1 dx \ldots\ldots\ldots (a').$$

En effet, prenant la dérivée de cette équation, il vient

$$MM_1y''-M_1M'y'-(2M_1M''+3M_1'M'+MM_1'')y=c_1M_1.$$

Mais (b') donne

$$2M_1M''+3M_1'M'+MM_1''=-M_1M''-MM_1X_1,$$

donc la précédente devient

$$M_1[My''-M'y'+(M''+X_1M)y]=M_1c_1;$$

ce qui est (a) multipliée par M_1.

On tire de (a') la valeur générale de y,

$$y=M^2M_1\left\{c_3+\int\frac{1}{M^3M_1^2}[c_2+c_1\int M_1dx]dx\right\}.$$

Mais il est évident que des équations (b) et (b'), à l'aide de la dérivée de (b'), on peut éliminer M''' et M'' et arriver à l'équation du premier ordre par rapport à M

$$4\left(M_1M_1''-\frac{3}{2}M_1'^2-X_1\frac{M_1^2}{2}\right)M'+$$

$$+\left[\frac{d}{dx}\left(M_1M_1''-\frac{3}{2}M_1'^2-X_1\frac{M_1^2}{2}\right)-\frac{3}{2}(X_1'-2X)M_1^2\right]M=0;$$

donc, si l'on fait pour abréger

$$M_1M_1''-\frac{3}{2}M_1'^2-X_1\frac{M_1^2}{2}=N,$$

il viendra

$$M=kN^{-\frac{1}{4}}.e^{\frac{3}{8}\int\frac{M_1^2}{N}(X_1'-2X)\,dx},$$

k désignant une constante arbitraire.

Ce qu'il fallait démontrer.

3. Pour trouver l'équation qui détermine M_1, faisons

$$\frac{N}{M_1^2}=N_1,$$

donc

$$N_1 = \frac{M_1''}{M_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{M_1'}{M_1}\right)^2 - \frac{X_1}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$M = kN_1^{-\frac{1}{4}} . M_1^{-\frac{1}{2}} . e^{\frac{3}{8}\int\left(\frac{X_1' - 2X}{N_1}\right)dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

et substituons cette dernière valeur de M dans (b); nous aurons

$$N_1(N_1'' - \frac{3}{2}X_1'' + 3X') - N_1'(N_1' - \frac{3}{2}X_1' + 3X) -$$

$$- \frac{1}{4}(N_1' - \frac{3}{2}X_1' + 3X)^2 + \frac{2}{3}N_1^2(N_1 - \frac{3}{2}X_1) = 0 \ldots\ldots (e)$$

Posons enfin

$$\frac{M_1'}{M_1} = p,$$

et remplaçons N_1 par sa valeur

$$N_1 = p' - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}X_1;$$

il viendra

$$(p' - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}X_1)p''' - \frac{5}{4}p''^2 + [p^3 + 3pp' + X_1p + 7X_1' - 9X]\frac{p''}{2} - \frac{1}{3}p'^3$$

$$-(7p^2 + 6X_1)\frac{p'^2}{4} + [p^4 + 4X_1p^2 + 9pX - 7X_1'p - 4X_1'' + 6X' + 3X_1^2]\frac{p'}{2}$$

$$- \frac{1}{12}p^6 - \frac{X_1}{2}p^4 + (4X_1'' - 6X' - 3X_1^2)\frac{p^2}{4} + X_1X_1'' - 2X_1'^2 + \frac{9}{2}XX_1'$$

$$- \frac{9}{4}X^2 - \frac{3}{2}X_1X' - \frac{1}{3}X_1^3 = 0 \ldots\ldots\ldots (f)$$

Une seule valeur particulière de p, ou, si l'on veut, une seule intégrale particulière de (f), fournira l'intégrale générale de l'équation donnée.

4. Soit pour premier exemple

$$X_1X_1'' - 2X_1'^2 + \frac{9}{2}XX_1' - \frac{9}{4}X^2 - \frac{3}{2}X_1X' - \frac{1}{3}X_1^3 = 0 : \quad (g)$$

je ferai $p=0$, et j'aurai pour la valeur du facteur M

$$M=\frac{1}{X_1}.e^{\frac{3}{2}\int\frac{X}{X_1}dx} \quad ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

par suite

$$y=M^2[c_3+\int\frac{1}{M^3}(c_2+c_1x)dx],$$

ce qui est l'intégrale générale de l'équation

$$y'''+X_1y'+Xy=0$$

dans laquelle les coefficients vérifient la condition (g). Telles sont, par exemple, les valeurs

$$X_1=-3a^2(x^2+1).$$

$$X=2a^2x(ax^2-a^2-6),$$

a désignant l'une des quatre racines de l'équation

$$m^4+m^2-3m+12=0.$$

On peut aussi vérifier (g) en faisant

$$X_1=Ax^n+A_1x^{n_1}+A_2x^{n_2}+\ldots\ldots$$

$$X=Bx^q+B_1x^{q_1}+B_2x^{q_2}+\ldots\ldots$$

De plus, attendu que M^2 est une intégrale particulière de l'équation donnée, on fera

$$y=M^2\int udx,$$

et on saura intégrer l'équation

$$X_1^2u''+3X_1(3X-2X_1')u'+(6X_1'^2-18XX_1'+\frac{27}{2}X^2-X_1^3)u=0.$$

5. Pour dernier exemple, prenons

$$\frac{M_1'}{M_1}=-2b\frac{(e^{2bx}+1)}{e^{2bx}-1},$$

b désignant une constante:

l'équation de condition sera

$$(X_1+4b^2)X_1''-2X_1'^2+\frac{9}{2}XX_1'-\frac{3}{2}(X_1+4b^2)X'-\frac{1}{3}X_1^3-$$
$$-\frac{9}{4}X^2-\frac{16}{3}b^6-3X_1b^4-3X_1^2b^2=0,$$

et les valeurs des facteurs

$$M_1=\frac{e^{2bx}}{(e^{2bx}-1)^2},$$

$$M=\frac{(e^{2bx}-1)e^{-bx}.e^{\frac{3}{2}\int\frac{Xdx}{X_1+4b^2}}}{X_1+4b^2}.$$

De plus, on fera, comme dans le premier exemple,

$$y=M^2M_1\int udx,$$

ce qui conduira à une nouvelle équation du second ordre que l'on saura intégrer.

En général, substituant $M^2M_1\int udx$ au lieu de y dans l'équation

$$y'''+X_1y'+Xy=0,$$

sans attribuer des valeurs déterminées aux facteurs, on trouvera en vertu de (b) et (b')

$$N_1^2.u''+\frac{3}{4}[3X_1'-6X-2N_1']N_1u'+\left[\frac{27}{32}(X'_1-2X)^2-\frac{9}{8}(X_1'-2X)N_1'\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}N_1'^2+N_1^3-\frac{1}{2}X_1N_1^2\right]u=0,$$

où

$$N_1=p'-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}X_1.$$

Cette équation est intégrable attendu qu'elle est satisfaite par

$$u=\frac{1}{M^3.M_1^2}.$$

Donc, en attribuant à M_1 des valeurs déterminées, telles que $M_1=$ *fonction entière de x*, $M_1=$ *fonction rationnelle de x*, etc, on peut trouver plusieurs classes d'équations du 3-me et du 2-d ordres réductibles aux quadratures.

6. Pour compléter cette note, je ferai encore une remarque à l'égard du changement de la variable indépendante.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Py=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

l'équation donnée, P désignant une fonction quelconque de x. Si l'on représente par μ le facteur intégrant de cette équation, on devra avoir en vertu de la formule d'Euler

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}+P\mu=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Soit

$$t=f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

la variable indépendante par rapport à laquelle le premier membre de (5) est une dérivée exacte: je dis que cette variable devra être telle que l'on ait

$$\frac{d^3t}{dx^3}+P\frac{dt}{dx}=0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

c'est-à-dire que l'on connaîtra la valeur de t si l'on donne soit une valeur particulière de y, soit celle du facteur μ, attendu que l'on pourra poser

$$\frac{dt}{dx}=\mu,$$

donc

$$t=\int \mu dx+\text{constante}.$$

Pour le faire voir, supposons que l'on ait substitué dans le second membre de l'équation

$$\frac{dt}{dx}=f'(x)$$

la valeur de x tirée de (7), et représentons le résultat de cette substitution par $\frac{dT}{dt}$, c'est-à- dire par la dérivée première d'une fonction T de la variable t: nous aurons

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dT}{dt}, \quad \frac{d^2t}{dx^2}=\frac{d^2T}{dt^2}\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d^3t}{dx^3} = \frac{d^3T}{dt^3} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)^2 \cdot \frac{dT}{dt}, \text{ etc;}$$

donc aussi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dT}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Par suite la proposée devient

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dT}{dt} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} + Py = 0.$$

Elle sera une dérivée exacte si l'on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{dT}{dt} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} + \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + P = 0.$$

Mais

$$\frac{dT}{dt} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} + \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 = \frac{d^3t}{dx^3} : \frac{dt}{dx},$$

donc

$$\frac{d^3t}{dx^3} + P\frac{dt}{dx} = 0; \text{ Ce qui est (8).}$$

Exemple. — $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^{-2}y = 0.$$

L'équation (8) est actuellement

$$\frac{d^3t}{dx^3} - 2x^{-2} \cdot \frac{dt}{dx} = 0.$$

On en tire la valeur particulière

$$\frac{dt}{dx} = x^2,$$

par conséquent le facteur intégrant est

$$\mu = x^2,$$

et

$$t = \frac{x^3}{3}$$

rendra la proposée immédiament intégrable. On trouve, en effet,

$$3t^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+2t^{\frac{1}{3}}\frac{dy}{dt}-\frac{2}{3}t^{\frac{-2}{3}}\cdot y=0.$$

et, en intégrant,

$$3t^{\frac{4}{3}}\frac{dy}{dt}-2t^{\frac{1}{3}}y=c.$$

7. Appliquant le même raisonnement à l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3}+X_1\frac{dy}{dx}+Xy=0,$$

sachant que l'équation qui détermine le facteur μ est

$$\frac{d^3\mu}{dx^3}+X_1\frac{d\mu}{dx}+\left(\frac{dX_1}{dx}-X\right)\mu=0,$$

on trouvera, après avoir fait

$$t=f(x),\quad \frac{dt}{dx}=\frac{dT}{dt},$$

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^3\cdot\frac{d^3y}{dt^3}+3\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^2T}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dT}{dt}\left[\frac{dT}{dt}\cdot\frac{d^3T}{dt^3}+\left(\frac{dT}{dt}\right)^2+X_1\right]\frac{dy}{dt}$$
$$+Xy=0.$$

Cette équation sera immédiatement intégrable si l'on trouve une valeur particulière de $\frac{dT}{dt}$ propre à vérifier l'équation

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^4T}{dt^3}+4\frac{dT}{dt}\cdot\frac{d^2T}{dt^2}\cdot\frac{d^3T}{dt^3}+\left(\frac{dT}{dt}\right)^3+X_1\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{dX_1}{dx}-X=0.$$

Mais

$$\frac{d^2T}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d^2t}{dx^2},$$

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\frac{d^4T}{dt^4}+4\frac{dT}{dt}\cdot\frac{d^2T}{dt^2}\cdot\frac{d^3T}{dt^3}=\frac{d^4t}{dx^2}\cdot\frac{1}{\frac{dt}{dx}},$$

donc

$$\frac{d^4t}{dx^4}+X_1\frac{d^2t}{dx^2}+\left(\frac{dX_1}{dx}-X\right)\frac{dt}{dx}=0.$$

Et si l'on connaissait une valeur particulière de μ, on trouverait la valeur correspondante de t en posant

$$\frac{dt}{dx}=\mu.$$

Réciproquement, si l'on connaissait t on trouverait aussi μ.

Il est évident aussi que tout ce qui a été dit dans les n-os 2, 3, 4, 5 de cette note à l'égard des facteurs M, M_1, ... M_{n-2} des équations linéaires successives se rapporte aussi aux variables indépendantes. Et l'ensemble de toutes mes propositions sur les équations linéaires aboutit au théorème unique que l'on peut énoncer de la manière suivante:

Si l'on trouve la solution de l'équation linéaire, différentielle ou aux différences finies, du second ordre, l'intégration de l'équation linéaire de l'ordre n *ne dépendra que des opérations algébriques.*

NOTE II.

Sur les fonctions elliptiques.

1. Étant donnée la fonction elliptique complète

$$y=F(x),$$

ou

$$y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi}},$$

on peut se proposer de trouver une équation différentielle qui ait y pour fonction et le module x pour variable indépendante. Pour résoudre ce problème on développera d'abord la quantité

$$(1-x^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

d'après la formule du binôme,

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^4 \operatorname{Sin}^4\varphi + \ldots .] d\varphi,$$

après quoi, à l'aide de la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{2n}\varphi . d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n},$$

on arrivera à la série

$$y = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1^2}{2^2} . x^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} . x^4 + \ldots + \frac{1^2 . 3^2 . . (2n-1)^2}{2^2 . 4^2 . . . (2n)^2} x^{2n} + \ldots\right] \ldots (I)$$

qui ne dépend plus de l'amplitude φ. Cela fait, prenons deux fois de suite la dérivée de (I); nous aurons

$$y' = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} x + \frac{1 . 3^2}{2^2 . 4} x^3 + \ldots + \frac{1^2 . 2^2 . . (2n-1)^2}{2^2 . 4^2 . . . 2n} . x^{2n-1} + \ldots\right],$$

$$y'' = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1 . 3^3}{2^2 . 4} . x^2 + \ldots + \frac{1^2 . 3^2 . . (2n-1)^3}{2^2 . 4^2 . . . 2n} . x^{2n-2} + \ldots\right].$$

Si l'on multiplie la série primitive par x, sa dérivée première par $3x^2-1$, sa dérivée seconde par x^3-x, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$(x^3-x)y'' + (3x^2-1)y' + xy = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (II)$$

C'est à cette équation que M. Borchardt a réduit *le problème des moyennes* dont voici l'énoncé.

On donne deux nombres quelconques a et b; si l'on forme la série des moyennes arithmétiques et des moyennes géométriques, et que l'on pose

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

. . . . . .

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

les nombres a_n, b_n convergeront vers une certaine limite commune μ: on demande de trouver cette limite.

L'une des valeurs particulières de μ est

$$\mu = \frac{a}{y}$$

sachant que $x = \frac{b}{a}$. Et si l'on représente cette solution par y_1, l'autre sera

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2 (x^3 - x)};$$

de sorte que la solution générale du problème est comprise dans la formule connue

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

c_1 et c_2 désignant les deux constantes d'intégration.

Pour déduire la valeur de y de l'équation (II) on posera d'après la méthode des coefficients indéterminés

$$y = Ax^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots$$

La substitution de cette valeur dans la dite équation donnera

$$A(m+1)^2 . x^{m+1} - Am^2 x^{m-1} + A_1 (m_1 + 1)^2 x^{m_1 + 1} - A_1 m_1^2 x^{m_1 - 1} + \ldots = 0,$$

et on rendra cette équation identique en prenant pour m soit 0, soit -1. La première de ces valeurs fournira la formule

$$m_n = 2n,$$

la dernière

$$m_n = -(2n+1),$$

et dans les deux cas la formule

$$A_n = \frac{A . 1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 . 4^2 \ldots (2n)^2}$$

déterminera les coefficients.

Si l'on désigne par c_1, c_2 les valeurs du coefficient A qui correspondent respectivement à $m = 0$, $m = -1$, on trouvera pour l'expression en série de l'intégrale générale de (II)

$$y=c_1\left[1+\frac{1^2}{2^2}\cdot x^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot x^4+\ldots+\frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2 4^2\ldots(2n)^2}x^{2n}+\ldots\right]$$

$$+\frac{c_2}{x}\left[1+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1^2.3^2.\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\cdot\frac{1}{x^{2n}}+\ldots\right].$$

Ou bien, en vertu de la relation

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin}^{2n}\varphi\,.\,d\varphi,$$

$$y=\frac{2c_1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}+\frac{2c_2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{x^2-\mathrm{Sin}^2\varphi}}\,.$$

2. Connaissant le problème des moyennes on calculera facilement et sans tâtonnement la fonction $F(x,\varphi)$.

En effet, en vertu des valeurs

$$x=\frac{b}{a},\quad x_1=\frac{b_1}{a_1}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x},\quad x_2=\frac{b_2}{a_2}=\frac{2\sqrt{x_1}}{1+x_1},\ldots,$$

x étant supposé <1, on aura sensiblement

$$F(x_n,\varphi_n)=\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\varphi}}=\mathrm{logtang}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi_n\right]\quad\ldots\ldots(1).$$

D'ailleurs, à cause de la valeur

$$\frac{a}{a_1}=\frac{2}{1+x},$$

on vérifie l'équation

$$\frac{d\varphi}{a\sqrt{1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}=\frac{d\varphi_1}{a_1\sqrt{1-x_1{}^2\mathrm{Sin}^2\varphi_1}}$$

de la manière suivante:

Multipliant par a et remplaçant $\frac{a}{a_1}$, x_1 par leurs valeurs respectives, il vient.

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi}} = \frac{2}{1+x}\cdot\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\cdot\mathrm{Sin}^2\varphi_1}},$$

ou

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi}} = \frac{2d\varphi_1}{\sqrt{(x+1)^2-4x\mathrm{Sin}^2\varphi_1}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

De cette dernière on tire successivement

$$d\varphi^2[(x+1)^2-4x\ \mathrm{Sin}^2\varphi_1] = 4d\varphi_1{}^2[1-x^2\ \mathrm{Sin}^2\varphi],$$

$$d\varphi^2[(x+1)^2-4(x+1)\ \mathrm{Sin}^2\varphi_1+4\ \mathrm{Sin}^4\varphi_1] =$$

$$= 4\left\{d\varphi_1{}^2(1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi)-d\varphi^2(\mathrm{Sin}^2\varphi_1\cdot\mathrm{Cos}^2\varphi_1)\right\},$$

$$d\varphi^2[x+1-2\mathrm{Sin}^2\varphi_1]^2 =$$

$$= 4\mathrm{Sin}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi\left\{d\varphi_1{}^2\frac{(1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi)}{\mathrm{Sin}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi}-\frac{d\varphi^2}{\mathrm{Cos}^2\varphi}\right\}.$$

Cette équation se décompose en ces deux autres

$$d\varphi^2 = \mathrm{Sin}^2\varphi\left[\frac{d\varphi_1{}^2(1-x^2\mathrm{Sin}^2\varphi)}{\mathrm{Sin}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi}-\frac{d\varphi^2}{\mathrm{Cos}^2\varphi}\right],$$

$$\mathrm{Sin}^2\varphi[x+1-2\mathrm{Sin}^2\varphi_1]^2 = 4\mathrm{Sin}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi_1\mathrm{Cos}^2\varphi.$$

La première en vertu de la dernière devient (2), et il vient

$$\mathrm{Sin}\varphi(x+1-2\mathrm{Sin}^2\varphi_1) = 2\mathrm{Sin}\varphi_1\mathrm{Cos}\varphi_1\mathrm{Cos}\varphi,$$

$$x\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Sin}2\varphi_1\cdot\mathrm{Cos}\varphi-\mathrm{Sin}\varphi(1-2\mathrm{Sin}^2\varphi_1).$$

$$x\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Sin}2\varphi_1\mathrm{Cos}\varphi-\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}2\varphi_1,$$

$$x\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Sin}(2\varphi_1-\varphi).$$

On aura aussi

$$x_1\mathrm{Sin}\varphi_1 = \mathrm{Sin}(2\varphi_2-\varphi_1),$$

$$x_2\mathrm{Sin}\varphi_2 = \mathrm{Sin}(2\varphi_3-\varphi_2),$$

etc,

et $$\mathrm{F}(x_n,\ \varphi_n) = \frac{1+x_{n-1}}{2}\cdot\mathrm{F}(x_{n-1};\ \varphi_{n-1}).$$

D'où

$$\mathrm{F}(x,\ \varphi) = \frac{2}{1+x}\cdot\frac{2}{1+x_1}\cdot\cdot\frac{2}{1+x_{n-1}}\cdot\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi_n\right)\ldots(\mathrm{III}).$$

On prolongera aussi la suite des moyennes en arrière des nombres donnés a, b, en posant

$$\frac{b}{a} = x = \frac{2\sqrt{x_1'}}{1+x_1'}, \quad x_1' = \frac{b'}{a'} = \frac{2\sqrt{x_2'}}{1+x_2'},$$

$$x_2' = \frac{b''}{a''} = \frac{2\sqrt{x_3'}}{1+x_3'}, \text{ etc,}$$

$$\mathrm{Sin}(2\varphi - \varphi_1') = x_1' \mathrm{Sin}\varphi_1',$$

$$\mathrm{Sin}(2\varphi_1' - \varphi_2') = x_2' \mathrm{Sin}\varphi_2',$$

etc

Et comme le terme x_n' a pour limite zéro on aura sensiblement

$$\mathrm{F}(x_n', \varphi_n') = \int_0^{\varphi_n'} d\varphi = \varphi_n'.$$

Par suite

$$\mathrm{F}(x, \varphi) = \frac{(1+x_1')}{2} \cdot \frac{(1+x_2')}{2} \cdots \frac{(1+x_n')}{2} \cdot \varphi_n'.$$

On a d'ailleurs, en vertu des équations

$$a = a_1' \frac{(1+x_1')}{2},$$

$$a_1' = a_2' \frac{(1+x_2')}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{a}{a_n'} = \frac{(1+x_1')}{2} \cdot \frac{(1+x_2')}{2} \cdot \frac{(1+x_n')}{2};$$

d'où

$$\mathrm{F}(x, \varphi) = \frac{a}{a_n'} \cdot \varphi_n'.$$

Faisons $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et soit P la limite vers laquelle converge $\frac{a}{a_n'}$; il viendra

$$\varphi_1' = \pi, \quad \varphi_2' = 2\pi, \ldots \varphi_n' = 2^{n-1} \cdot \pi,$$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P} \cdot 2^{n-1} \cdot \pi.$$

On trouvera de même

$$F(x,\ \varphi) = \frac{a}{a_n} \cdot \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right).$$

Il est à observer que la forme de l'équation (II) ne changera pas si l'on prend le module complémentaire pour variable indépendante. Posons, en effet

$$1 - x^2 = z^2,$$

nous aurons

$$(z^3 - z)\frac{d^2y}{dz^2} + (3z^2 - 1)\frac{dy}{dz} + zy = 0.$$

On peut donc prendre

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - x^2},$$

co qui changera la valeur de y en

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\mathrm{Cos}^2\varphi + b^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}.$$

3. Comme exercice je placerai ici les énoncés suivants:

Problème 1. Si l'on substitue dans (II) au lieu de y sa valeur, donnée par l'équation

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2\mathrm{Sin}^2\varphi}},$$

on trouvera

$$\int_0^{\pi} {}^{2}[x^2\mathrm{Sin}^4\varphi + 2(1-x^2)\mathrm{Sin}^2\varphi - 1](1 - x^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{-\frac{5}{2}} . d\varphi = 0:$$

prouver que le premier membre est identiquement zéro.

Problème 2. Déduire l'équation différentielle entre y et x en posant successivement

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2\mathrm{Sin}^2\varphi} \cdot d\varphi,$$